# El Teorema Fundamental del Cálculo 14

Por las indicaciones dadas en el capítulo anterior, el lector ya habrá adivinado cuál va a ser el primer teorema de este capítulo. Sabemos que si $f$ es integrable, entonces $F(x) = \int_a^x f$ es continua; es natural, pues, preguntarse qué ocurre cuando la función original $f$ es continua. Resulta entonces que $F$ es diferenciable (y su derivada es particularmente sencilla).

**Teorema 1 (el primer Teorema Fundamental del Cálculo).** *Sea $f$ integrable en $[a,b]$, y definamos $F$ en $[a,b]$ mediante*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

*Si $f$ es continua en $c$ de $[a,b]$, entonces $F$ es diferenciable en $c$, y*

$$F'(c) = f(c).$$

*(Si $c = a$ o $b$, entonces se entiende que $F'(c)$ significa la derivada por la derecha o por la izquierda de $F$.)*

**Demostración.** Supondremos que $c$ es un punto de $(a,b)$; las sencillas modificaciones para el caso $c = a$ o $b$ se dejan para el lector. Por definición,

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$

Supongamos primero que $h > 0$. Entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

Definamos $m_h$ y $M_h$ de la manera siguiente (Figura 1):

$$m_h = \inf\{f(x) : c \le x \le c+h\},$$
$$M_h = \sup\{f(x) : c \le x \le c+h\}.$$

Según el Teorema 13-7 deducimos que

$$m_h \cdot h \le \int_c^{c+h} f \le M_h \cdot h.$$

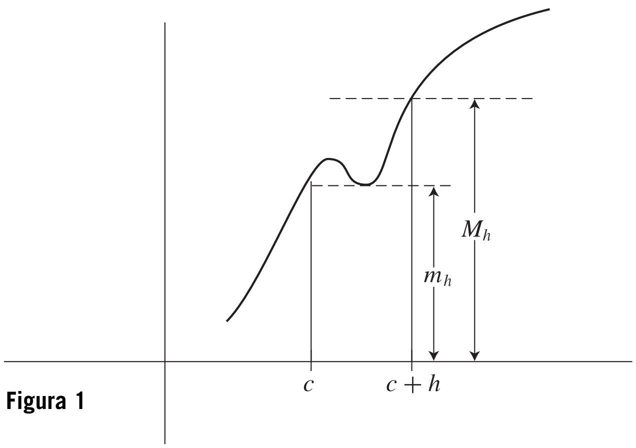



Figura 1

Por tanto

$$m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h.$$

Si $h < 0$, únicamente deben cambiarse algunos detalles de la demostración. Sea

$$m_h = \text{ínf}\{f(x) : c+h \leq x \leq c\},$$
$$M_h = \sup\{f(x) : c+h \leq x \leq c\}.$$

Entonces

$$m_h \cdot (-h) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq M_h \cdot (-h).$$

Como

$$F(c+h)-F(c) = \int_{c}^{c+h} f = -\int_{c+h}^{c} f$$

obtenemos

$$m_h \cdot h \geq F(c+h)-F(c) \geq M_h \cdot h.$$

Como $h < 0$, al dividir por $h$ se invierte nuevamente la desigualdad, obteniéndose el mismo resultado que en el caso anterior:

$$m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h.$$

Esta desigualdad es cierta para cualquier función integrable, sea o no continua. Sin embargo, como $f$ es continua en $c$,

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(c),$$

y esto demuestra que

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c). \qquad \blacksquare$$

Aunque en el Teorema 1 se considera únicamente la función obtenida al variar el límite de integración superior, un sencillo argumento demuestra lo que ocurre cuando lo que varía es el límite de integración inferior. Si $G$ se define mediante

$$G(x) = \int_{x}^{b} f,$$

entonces

$$G(x) = \int_{a}^{b} f - \int_{a}^{x} f.$$

Por consiguiente, si $f$ es continua en $c$, entonces

$$G'(c) = -f(c).$$

El signo menos que aparece en la igualdad anterior permite extender el Teorema 1 al caso en que la función

$$F(x) = \int_a^x f$$

esté definida incluso para $x < a$. En este caso podemos escribir

$$F(x) = -\int_x^a f,$$

de manera que si $c < a$ obtenemos

$$F'(c) = -(-f(c)) = f(c),$$

exactamente lo mismo que antes.

Obsérvese que en cualquier caso la diferenciabilidad de $F$ en $c$ está asegurada por la continuidad de $f$ únicamente en $c$. Sin embargo, el Teorema 1 es mucho más interesante cuando $f$ es continua en todos los puntos del intervalo $[a,b]$. En este caso $F$ es diferenciable en todos los puntos de $[a,b]$ y

$$F' = f.$$

En general, es extremadamente difícil saber si una función $f$ dada es la derivada de alguna otra función; por esta razón el Teorema 11-7 y los Problemas 11-60 y 11-61 son particularmente interesantes ya que revelan ciertas propiedades que $f$ debe poseer. Sin embargo, si $f$ es continua no hay ninguna dificultad –según el Teorema 1, $f$ *es* la derivada de alguna otra función, en particular la función

$$F(x) = \int_a^x f.$$

El Teorema 1 tiene un corolario sencillo que, a menudo, reduce el cálculo de integrales a una trivialidad.

**Corolario.** *Si $f$ es continua en $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función $g$, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

**Demostración.** Sea

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces $F' = f = g'$ en $[a,b]$. Por consiguiente, existe un número $c$ tal que

$$F = g + c.$$

El número $c$ puede calcularse fácilmente: obsérvese que

$$0 = F(a) = g(a) + c,$$

por tanto $c = -g(a)$; así

$$F(x) = g(x) - g(a).$$

Esto se cumple, en particular, para $x = b$. De manera que

$$\int_a^b f = F(b) = g(b) - g(a). \qquad \blacksquare$$

A primera vista, la demostración de este corolario parece inútil ya que, ¿Cuál es la ventaja de saber que

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

si $g$ es, por ejemplo, la función $g(x) = \int_a^x f$? La ventaja radica en que podría conocerse una función, muy distinta a la función $g$, con esta propiedad. Por ejemplo, si

$$g(x) = \frac{x^3}{3} \quad \text{y} \quad f(x) = x^2,$$

entonces $g'(x) = f(x)$ de manera que obtenemos, incluso sin tener que calcular sumas inferiores y superiores:

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Se pueden tratar, análogamente, otras potencias; si $n$ es un número natural y $g(x) = x^{n+1}/(n+1)$, entonces $g'(x) = x^n$, por tanto

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Para cualquier número natural $n$, la función $f(x) = x^{-n}$ no está acotada en cualquier intervalo que contenga 0, pero si $a$ y $b$ son ambos positivos o negativos, entonces

$$\int_a^b x^{-n}\,dx = \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1}.$$

Naturalmente esta fórmula sólo es válida si $n \neq 1$. *No conocemos ninguna expresión sencilla para*

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx.$$

El problema de calcular esta integral se discute más adelante pero constituye una buena oportunidad para advertir sobre la posibilidad de cometer un serio error. La conclusión del Corolario 1 se confunde a menudo con la definición de las integrales –muchos estudiantes piensan que $\int_a^b f$ se define como: "$g(b) - g(a)$, siendo $g$ una función cuya derivada es $f$". Esta "definición" no sólo es errónea, sino también inútil. Una razón de ello es que una función $f$ puede ser integrable sin ser la derivada de ninguna otra función. Por ejemplo, si $f(x) = 0$ para $x \neq 1$ y $f(1) = 1$, entonces $f$ es integrable, pero $f$ no puede ser una derivada (¿Por qué no?). Otra razón, mucho más importante, es que si $f$ es continua entonces sabemos que $f = g'$ para alguna función $g$; pero esto lo sabemos *únicamente por el Teorema 1*. La función $f(x) = 1/x$ constituye un ejemplo excelente de este hecho: si $x > 0$, entonces $f(x) = g'(x)$, siendo

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,$$

y no conocemos ninguna otra función $g$ más simple con esta propiedad.

El corolario del Teorema 1 es tan útil que frecuentemente se le denomina el "Segundo Teorema Fundamental del Cálculo". En este libro, dicha denominación se reserva para un resultado algo más fuerte (aunque en la práctica no mucho más útil). Como acabamos de comentar, una función $f$ podría ser de la forma $g'$ incluso aunque $f$ no fuese continua. Si $f$ es integrable, entonces todavía es cierto que

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Sin embargo, la demostración debe ser totalmente diferente –no podemos utilizar el Teorema 1, lo que nos obliga a volver de nuevo a la definición de las integrales.

**Teorema 2 (el segundo Teorema Fundamental del Cálculo).** *Si $f$ es integrable en $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función $g$, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

**Demostración.** Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$. Según el Teorema del Valor Medio existe un punto $x_i$ de $[t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\begin{aligned} g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= f(x_i)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\}, \\ M_i &= \sup\{f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\}, \end{aligned}$$

entonces claramente

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \le f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \le M_i(t_i - t_{i-1}),$$

es decir,

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \le g(t_i) - g(t_{i-1}) \le M_i(t_i - t_{i-1}).$$

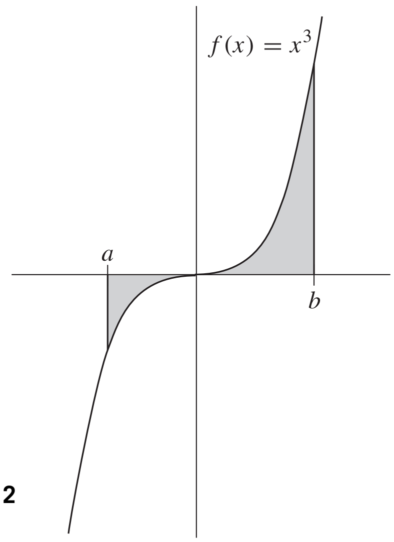



**Figura 2**

Sumando estas ecuaciones para $i = 1, \ldots, n$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

de manera que

$$L(f,P) \leq g(b) - g(a) \leq U(f,P)$$

*para toda partición P*. Pero esto significa que

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f. \qquad \blacksquare$$

Ya hemos utilizado el corolario del Teorema 1 (o, equivalentemente, el Teorema 2) para hallar las integrales de unas pocas funciones elementales:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1.$$

($a$ y $b$ ambos positivos o ambos negativos si $n < 0$).

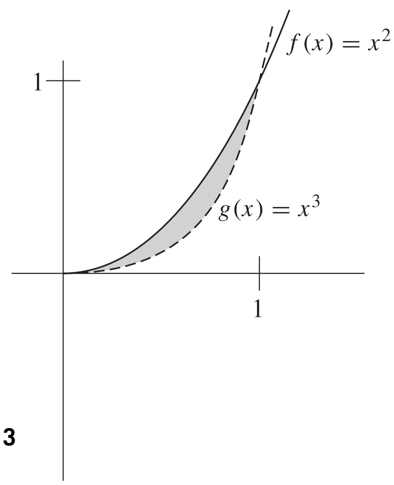



**Figura 3**

Como ya indicamos en el Capítulo 13, esta integral no siempre representa el área limitada por la gráfica de la función, el eje horizontal, y las líneas verticales por $(a,0)$ y $(b,0)$. Por ejemplo, si $a < 0 < b$, entonces

$$\int_a^b x^3\,dx$$

no representa el área de la región representada en la Figura 2; dicha área se calcula mediante la expresión

$$-\left(\int_a^0 x^3\,dx\right) + \int_0^b x^3\,dx = -\left(\frac{0^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right) + \left(\frac{b^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)$$
$$= \frac{a^4}{4} + \frac{b^4}{4}.$$

Debe también tenerse un especial cuidado al calcular las áreas de regiones limitadas por las gráficas de dos o más funciones –un problema que a menudo puede exigir un grado considerable de ingenio. Supongamos, para dar primero un ejemplo sencillo, que se desea hallar el área de la región, representada en la Figura 3, entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3$$

en el intervalo $[0,1]$. Si $0 \leq x \leq 1$, entonces $0 \leq x^3 \leq x^2$, de manera que la gráfica de $g$ se encuentra por debajo de la gráfica de $f$. El área de la región de interés es, por tanto,

$$\text{área } R(f,0,1) - \text{ área } R(g,0,1),$$

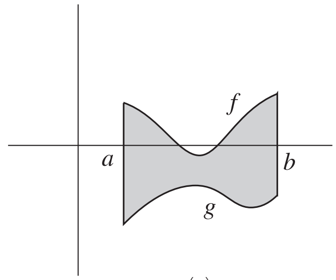
que es igual a

$$\int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x^3\,dx = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}.$$

Esta área podría haberse expresado como

$$\int_a^b (f-g).$$

Si $g(x) \leq f(x)$ para todo $x$ de $[a,b]$, entonces dicha integral representa siempre el área limitada por $f$ y $g$, *incluso aunque $f$ y $g$ sean a veces negativas*. La manera más fácil de visualizarlo se muestra en la Figura 4. Si $c$ es un número tal que $f+c$ y $g+c$ son no negativas en $[a,b]$, entonces la región $R_1$, limitada por $f$ y $g$, tiene la misma área que la región $R_2$, limitada por $f+c$ y $g+c$. Por consiguiente,



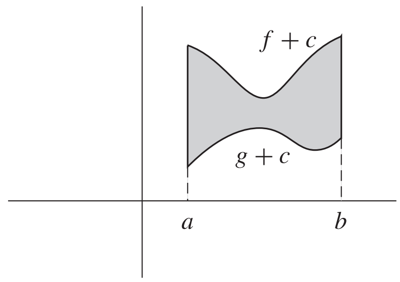




Figura 4

$$\begin{aligned} \text{área } R_1 = \text{área } R_2 &= \int_a^b (f+c) - \int_a^b (g+c) \\ &= \int_a^b [(f+c)-(g+c)] \\ &= \int_a^b (f-g). \end{aligned}$$

Esta observación es útil en el siguiente problema: hallar el área de la región limitada por las gráficas de

$$f(x) = x^3 - x \quad \text{ y } \quad g(x) = x^2.$$

Primero debe determinarse la región de manera más precisa. Las gráficas de $f$ y $g$ se intersecan cuando

$$\begin{aligned} & x^3 - x = x^2, \\ \text{o}\quad & x^3 - x^2 - x = 0, \\ \text{o}\quad & x(x^2 - x - 1) = 0, \\ \text{o}\quad & x = 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

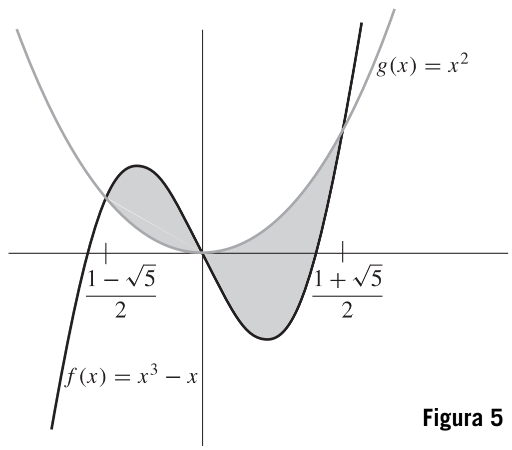



Figura 5

En el intervalo $([1-\sqrt{5}]/2, 0)$ se verifica que $x^3 - x \geq x^2$ y en el intervalo $(0, [1+\sqrt{5}]/2)$ se verifica que $x^2 \geq x^3 - x$. Aunque estas desigualdades son evidentes observando las gráficas (Figura 5), pueden comprobarse fácilmente, de la manera siguiente. Como $f(x) = g(x)$ sólo si $x = 0$, $[1+\sqrt{5}]/2$, o $[1-\sqrt{5}]/2$, la función $f-g$ no cambia de signo en los intervalos $([1-\sqrt{5}]/2, 0)$ y $(0, [1+\sqrt{5}]/2)$; por tanto, tan sólo es necesario observar, por ejemplo, que

$$\begin{gathered} (-\tfrac{1}{2})^3 - (-\tfrac{1}{2}) - (-\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{8} > 0, \\ 1^3 - 1 - 1^2 = -1 < 0, \end{gathered}$$

para concluir que

$$f-g \geq 0 \text{ en } ([1-\sqrt{5}]/2, 0),$$
$$f-g \leq 0 \text{ en } (0, [1+\sqrt{5}]/2).$$

El área de la región en cuestión es pues

$$\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3 - x - x^2)\,dx + \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} [x^2 - (x^3 - x)]\,dx.$$

Como ilustra este ejemplo, uno de los principales problemas del cálculo de áreas puede ser la determinación exacta de la región cuya área desea calcularse. Sin embargo, existen otros problemas más substanciales de naturaleza lógica –hasta ahora hemos definido solamente las áreas de ciertas regiones muy especiales, que incluso no incluyen algunas de las regiones cuyas áreas hemos calculado! Simplemente hemos supuesto que tenía sentido atribuir un área a dichas regiones y que se cumplían ciertas propiedades razonables del "área". Estas observaciones no significan que el lector no deba utilizar el ingenio para el cálculo de áreas, sino que indican simplemente que existe una manera mejor de definir las áreas, aunque el lugar apropiado para hacerlo sería en un libro de cálculo avanzado. El deseo de definir el área fue la motivación, tanto en este libro como históricamente, de la definición de integral, pero la integral no proporciona realmente el mejor método para *definir* las áreas, aunque generalmente es la herramienta adecuada para *calcularlas* .

Puede ser desalentador saber que las integrales no son adecuadas para el propósito por el cual fueron inventadas, pero pronto veremos lo esenciales que resultan ser para otros propósitos. Ya hemos comentado la utilidad más importante de las integrales: si $f$ es continua, la integral permite obtener una función $y$ tal que

$$y'(x) = f(x).$$

Esta ecuación constituye el ejemplo más sencillo de una "ecuación diferencial" (una ecuación de una función $y$ que incluye las derivadas de $y$). El Teorema Fundamental del Cálculo afirma que dicha ecuación diferencial tiene una solución si $f$ es continua. En capítulos sucesivos, y en varios problemas, resolveremos ecuaciones más complicadas, pero la solución casi siempre dependerá, de alguna manera, de la integral; para resolver una ecuación diferencial es necesario construir una nueva función, y la integral es una de las mejores maneras para hacerlo.

Como las funciones diferenciables suministradas por el Teorema Fundamental del Cálculo van a desempeñar un papel esencial en nuestro estudio posterior, es muy importante saber que dichas funciones pueden combinarse, al igual que ocurre con otras no tan sofisticadas, para obtener todavía más funciones cuyas derivadas pueden calcularse mediante la Regla de la Cadena.

Supongamos, por ejemplo, que

$$f(x) = \int_{a}^{x^3} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$$

Aunque la notación dificulta la interpretación, en realidad $f$ es la composición de las funciones

$$C(x) = x^3 \quad \text{y} \quad F(x) = \int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

De hecho, $f(x) = F(C(x))$; en otras palabras, $f = F \circ C$. Por tanto, aplicando la Regla de la Cadena,

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(C(x)) \cdot C'(x) \\ &= F'(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x^3} \cdot 3x^2. \end{aligned}$$

Si, por el contrario, $f$ se define mediante

$$f(x) = \int_{x^3}^a \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt,$$

entonces

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x^3} \cdot 3x^2.$$

Si $f$ se define mediante la composición *inversa*,

$$f(x) = \left( \int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt \right)^3,$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= C'(F(x)) \cdot F'(x) \\ &= 3\left( \int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt \right)^2 \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

Análogamente, si

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt, \\ g(x) &= \int_{\operatorname{sen} x}^a \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt, \\ h(x) &= \operatorname{sen}\left( \int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt \right), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)} \cdot \cos x, \\ g'(x) &= \frac{-1}{1+\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)} \cdot \cos x, \\ h'(x) &= \cos\left( \int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt \right) \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

La función de aspecto aterrador

$$f(x) = \int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt$$

es también una composición; de hecho, $f = F \circ F$. Por tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(F(x)) \cdot F'(x) \\ &= \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

Como muestran estos ejemplos, la expresión situada en el límite de integración superior (o inferior) es aquella función que aparecerá a la *derecha* cuando $f$ se escribe como una composición. Como un último ejemplo, consideremos las composiciones triples

$$f(x) = \int_a^{\left(\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt, \qquad g(x) = \int_a^{\left[\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right]} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt,$$

que pueden escribirse como

$$f = F \circ F \circ C \quad \text{y} \quad g = F \circ F \circ F.$$

Omitiendo los pasos intermedios (que el lector puede ir calculando, si todavía se siente inseguro), obtenemos

$$f'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left(\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x^3} \cdot 3x^2,$$

$$\begin{aligned} g'(x) = {} & \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left[\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right]} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \\ & \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

Como en el caso de las diferenciaciones más simples del Capítulo 10, estas diferenciaciones se hacen mucho más sencillas con la práctica proporcionada por algunos de los problemas, y, al igual que ocurría con los problemas del Capítulo 10, constituyen una manera de comprobar si el lector ha entendido la Regla de la Cadena, en el contexto algo menos familiar ofrecido por el Teorema Fundamental del Cálculo.

Las importantes aplicaciones de la integral, que consideraremos en los siguientes capítulos, dependen del Teorema Fundamental del Cálculo, a pesar de que la demostración de dicho teorema resultó ser bastante sencilla –da la impresión de que la auténtica dificultad radicaba en la definición de la integral. En realidad esto no es del todo cierto.

Para poder aplicar el Teorema 1 a una función continua, es necesario saber que si $f$ es continua en $[a,b]$, entonces $f$ es integrable en $[a,b]$. Aunque ya hemos dado una demostración de este resultado, existe otro argumento más elemental que quizás el lector pueda preferir. Como la mayoría de los argumentos "elementales", el que vamos a dar es bastante artificioso, pero tiene la virtud de que obligará al lector a revisar la demostración del Teorema 1.

Si $f$ es cualquier función acotada en $[a,b]$, entonces

$$\sup\{L(f,P)\} \quad \text{y} \quad \text{ínf}\{U(f,P)\}$$

existen ambos, incluso aunque $f$ no sea integrable. Estos números se denominan la **"integral inferior"** de $f$ en $[a,b]$ y la **"integral superior"** de $f$ en $[a,b]$, respectivamente, y los representaremos mediante

$$\mathbf{L}\int_a^b f \quad \text{y} \quad \mathbf{U}\int_a^b f.$$

Las integrales superiores e inferiores comparten varias propiedades con la integral. En particular, si $a < c < b$, entonces

$$\mathbf{L}\int_a^b f = \mathbf{L}\int_a^c f + \mathbf{L}\int_c^b f \quad \text{y} \quad \mathbf{U}\int_a^b f = \mathbf{U}\int_a^c f + \mathbf{U}\int_c^b f,$$

y si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x$ de $[a,b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \mathbf{L}\int_a^b f \leq \mathbf{U}\int_a^b f \leq M(b-a).$$

Las demostraciones de estos hechos se dejan como ejercicios para el lector, ya que son muy similares a las demostraciones correspondientes para las integrales. De hecho, los resultados obtenidos para las integrales son un corolario de los resultados correspondientes a las integrales superiores e inferiores, ya que $f$ es integrable precisamente cuando

$$\mathbf{L}\int_a^b f = \mathbf{U}\int_a^b f.$$

Demostraremos que una función continua $f$ es integrable, probando que esta igualdad siempre se verifica para las funciones continuas. En realidad, es más fácil demostrar que

$$\mathbf{L}\int_a^x f = \mathbf{U}\int_a^x f$$

para todo $x$ de $[a,b]$; la estrategia consiste en observar que la mayor parte de la demostración del Teorema 1 no dependió del hecho de que $f$ fuese integrable.

**Teorema 13-3.** *Si $f$ es continua en $[a,b]$, entonces $f$ es integrable en $[a,b]$.*

**Demostración.** Definamos las funciones $L$ y $U$ en $[a,b]$ mediante

$$L(x) = \mathbf{L}\int_a^x f \quad \text{y} \quad U(x) = \mathbf{U}\int_a^x f.$$

Sea $x$ un punto de $(a,b)$. Si $h>0$ y

$$\begin{aligned} m_h &= \text{ínf}\{f(t) : x \le t \le x+h\}, \\ M_h &= \sup\{f(t) : x \le t \le x+h\}, \end{aligned}$$

entonces

$$m_h \cdot h \le \mathbf{L}\int_x^{x+h} f \le \mathbf{U}\int_x^{x+h} f \le M_h \cdot h,$$

por lo tanto

$$m_h \cdot h \le L(x+h) - L(x) \le U(x+h) - U(x) \le M_h \cdot h$$

o sea

$$m_h \le \frac{L(x+h)-L(x)}{h} \le \frac{U(x+h)-U(x)}{h} \le M_h.$$

Si $h<0$ y

$$\begin{aligned} m_h &= \text{ínf}\{f(t) : x+h \le t \le x\}, \\ M_h &= \sup\{f(t) : x+h \le t \le x\}, \end{aligned}$$

se obtiene la misma desigualdad, al igual que en la demostración del Teorema 1.

Como $f$ es continua en $x$, resulta que

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(x),$$

y esto demuestra que

$$L'(x) = U'(x) = f(x) \quad \text{para } x \text{ de } (a,b).$$

lo cual significa que existe un número $c$ tal que

$$U(x) = L(x) + c \quad \text{para todo } x \text{ de } [a,b].$$

Como

$$U(a) = L(a) = 0,$$

el número $c$ debe ser igual a 0, por tanto

$$U(x) = L(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } [a,b].$$

En particular,

$$\mathbf{U}\int_a^b f = U(b) = L(b) = \mathbf{L}\int_a^b f,$$

y esto significa que $f$ es integrable en $[a,b]$. ■

## Problemas

**1.** Hallar las derivadas de cada una de las siguientes funciones.

(i) $F(x) = \displaystyle\int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t\, dt.$

(ii) $F(x) = \displaystyle\int_3^{\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\, dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^6 t + t^2}\, dt$

(iii) $F(x) = \displaystyle\int_{15}^{x} \left( \int_8^y \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt \right) dy.$

(iv) $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt.$

(v) $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt.$

(vi) $F(x) = \operatorname{sen}\left( \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\left( \int_0^y \operatorname{sen}^3 t\, dt \right) dy \right).$

(vii) $F^{-1}$, siendo $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$

(viii) $F^{-1}$, siendo $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$

(Hallar $(F^{-1})'(x)$ en términos de $F^{-1}(x)$.)

**2.** Para cada una de las $f$ siguientes, si $F(x) = \int_0^x f$, ¿En qué puntos $x$ se verifica que $F'(x) = f(x)$? (Precaución: podría ocurrir que $F'(x) = f(x)$, incluso si $f$ no es continua en $x$.)

(i) $f(x) = 0$ si $x \le 1$, $f(x) = 1$ si $x > 1$.
(ii) $f(x) = 0$ si $x < 1$, $f(x) = 1$ si $x \ge 1$.
(iii) $f(x) = 0$ si $x \ne 1$, $f(x) = 1$ si $x = 1$.
(iv) $f(x) = 0$ si $x$ es irracional, $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ fracción irreducible.
(v) $f(x) = 0$ si $x \le 0$, $f(x) = x$ si $x \ge 0$.
(vi) $f(x) = 0$ si $x \le 0$ o $x > 1$, $f(x) = 1/[1/x]$ si $0 < x \le 1$.
(vii) $f$ es la función indicada en la Figura 6.
(viii) $f(x) = 1$ si $x = 1/n$ para algún $n$ de $\mathbf{N}$, $f(x) = 0$ en los demás casos.

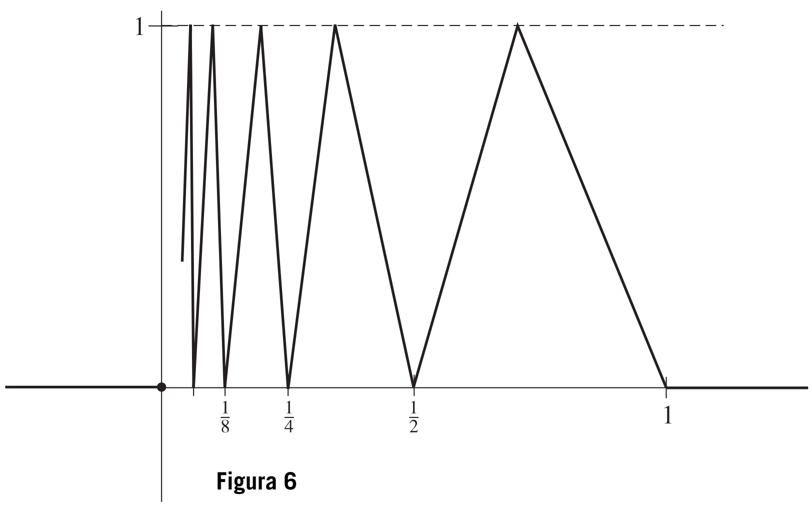



**Figura 6**

**3.** Demostrar que los valores de las siguientes expresiones no dependen de $x$:

(i) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\, dt.$

(ii) $\displaystyle\int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \quad x \in (0, \pi/2).$

**4.** Hallar $(f^{-1})'(0)$ si

(i) $f(x) = \int_0^x 1 + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\,dt.$ (ii) $f(x) = \int_1^x \cos(\cos t)\,dt.$

(No evaluar $f$ explícitamente.)

**5.** Hallar una función $g$ tal que

(i) $\int_0^x t g(t)\,dt = x + x^2.$ (ii) $\int_0^{x^2} t g(t)\,dt = x + x^2.$

(Obsérvese que no se supone que $g$ sea continua en 0.)

**6.** (a) Hallar todas las funciones continuas $f$ que satisfacen

$$\int_0^x f = (f(x))^2 + C \qquad \text{para alguna constante } C,$$

suponiendo que $f$ no es 0 en ningún intervalo (en realidad, es suficiente suponer que $f$ tiene como máximo un 0).

(b) Hallar una solución que sea 0 en cualquier intervalo dado $[a,b]$, para un $C$ apropiado. Indicación: puede ayudar comenzar con el caso en el que 0 es un punto de $[a,b]$

**7.** Utilizar el Problema 13-23 para demostrar que

(i) $\dfrac{1}{7\sqrt{2}} \le \displaystyle\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \le \frac{1}{7}.$ (ii) $\dfrac{3}{8} \le \displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \le \frac{\sqrt{3}}{4}.$

**8.** Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x x f(t)\,dt$. (La respuesta *no* es $xf(x)$; debe realizarse una manipulación obvia en la integral antes de intentar calcular $F'$.)

**9.** Demostrar que si $f$ es continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du.$$

Indicación: diferenciar ambos lados de la igualdad, utilizando el Problema 8.

***10.** Utilizar el Problema 9 para demostrar que

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2\,du = 2\int_0^x \left(\int_0^{u_2} \left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right) du_1\right) du_2.$$

**11.** Hallar una función $f$ tal que $f'''(x) = 1 \big/ \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}$. (Este problema se supone que es fácil; no interpretar erróneamente la palabra "hallar").

**12.** Una función $f$ es **periódica**, con **período** $a$, si $f(x+a) = f(x)$ para todo $x$.

(a) Si $f$ es periódica con período $a$ e integrable en $[0,a]$, demostrar que

$$\int_0^a f = \int_b^{b+a} f \quad \text{para todo } b.$$

(b) Hallar una función $f$ que no sea periódica, pero que lo sea $f'$. Indicación: elegir una $g$ periódica para la cual pueda asegurarse que $f(x) = \int_0^x g$ no sea periódica.

(c) Si $f'$ es periódica con período $a$ y $f(a) = f(0)$, entonces $f$ es también periódica con período $a$.

*(d) Recíprocamente, si $f'$ es periódica con período $a$ y $f$ es periódica (con algún período no necesariamente $= a$), entonces $f(a) = f(0)$.

**13.** Hallar $\int_0^b \sqrt[n]{x}\,dx$, encontrando simplemente una función $f$ con $f'(x) = \sqrt[n]{x}$, y utilizando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Cotejar después con el problema 13-21.

***14.** Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo y el Problema 13-21 para deducir el resultado enunciado en el Problema 12-21.

***15.** Sean $C_1$, $C$ y $C_2$ curvas que pasan por el origen, tal como se muestra en la Figura 7. Cada punto de $C$ se puede unir a un punto de $C_1$ mediante un segmento rectilíneo vertical y a un punto de $C_2$ mediante un segmento horizontal. Diremos que $C$ *biseccciona* $C_1$ y $C_2$ si las regiones $A$ y $B$ tienen la misma área para cada punto de $C$.

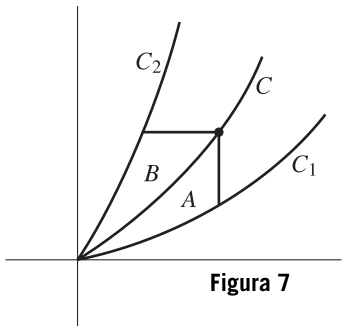



**Figura 7**

(a) Si $C_1$ es la gráfica de $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ y $C$ es la gráfica de $f(x) = 2x^2$, $x \geq 0$, hallar $C_2$ de manera que $C$ biseccione a $C_1$ y $C_2$.

(b) En general, hallar $C_2$ si $C_1$ es la gráfica de $f(x) = x^m$, y $C$ es la gráfica de $f(x) = cx^m$ para algún $c > 1$.

**16.** (a) Hallar las derivadas de $F(x) = \int_1^x 1/t\,dt$ y $G(x) = \int_b^{bx} 1/t\,dt$.

(b) Dar ahora una nueva demostración para el Problema 13-15.

***17.** Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema de Darboux (Problema 11-60) para dar otra demostración del "Teorema del Valor Intermedio".

**18.** Demostrar que si $h$ es continua, $f$ y $g$ son diferenciables, y

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt,$$

entonces $F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$. Indicación: intente reducir el problema a los dos casos ya conocidos, con una constante como límite de integración inferior o superior.

**19.** Sea $f$ integrable en $[a,b]$, sea $c$ un punto de $(a,b)$, y sea

$$F(x) = \int_a^x f, \quad a \leq x \leq b.$$

Para cada una de las siguientes afirmaciones, dar una demostración o un contraejemplo.

(a) Si $f$ es diferenciable en $c$, entonces $F$ es diferenciable en $c$.

(b) Si $f$ es diferenciable en $c$, entonces $F'$ es continua en $c$.

(c) Si $f'$ es continua en $c$, entonces $F'$ es continua en $c$.

***20.** Sea

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

La función $F(x) = \int_0^x f$ ¿Es diferenciable en 0? Indicación: consultar la página 180.

**21.** Suponer que $f'$ es integrable en $[0,1]$ y que $f(0)=0$. Demostrar que para todo $x$ de $[0,1]$ se verifica

$$|f(x)| \le \sqrt{\int_0^1 |f'|^2}.$$

Demostrar también que la hipótesis $f(0)=0$ es necesaria. Indicación: Problema 13-39.

*__22.__ Suponer que $f$ es una función diferenciable con $f(0)=0$ y $0<f'\le 1$. Demostrar que para todo $x\ge 0$ se verifica

$$\int_0^x f^3 \le \left(\int_0^x f\right)^2.$$

*__23.__ (a) Suponer que $G'=g$ y $F'=f$. Demostrar que si la función $y$ satisface la "ecuación diferencial"

(*) $\qquad g(y(x))\cdot y'(x)=f(x)$ para todo $x$ de algún intervalo,

entonces existe un número $c$ tal que

(**) $\qquad G(y(x))=F(x)+c$ para todo $x$ de este intervalo.

(b) Demostrar, recíprocamente, que si $y$ satisface $(**)$, entonces $y$ es una solución de $(*)$.

(c) Hallar qué condición debe satisfacer $y$ si

$$y'(x)=\frac{1+x^2}{1+y(x)}.$$

(En este caso $g(t)=1+t$ y $f(t)=1+t^2$.) Entonces "resolver" las ecuaciones resultantes para hallar todas las soluciones posibles $y$ (ninguna solución posee $\mathbf{R}$ como su dominio).

(d) Hallar qué condición debe satisfacer $y$ si

$$y'(x)=\frac{-1}{1+5[y(x)]^4}.$$

(Una referencia al Problema 12-14 demostrará que *existen* funciones que satisfacen la ecuación resultante.)

(e) Hallar todas las funciones $y$ tales que

$$y(x)y'(x)=-x.$$

Hallar la solución $y$ que verifica $y(0)=-1$.

**24.** En el Problema 10-19 vimos que la derivada Schwarziana

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

era 0 para $f(x)=(ax+b)/(cx+d)$. Supongamos ahora que $f$ es cualquier función cuya derivada Schwarziana es 0.

(a) $f''^2/f'^3$ es una función constante.

(b) $f$ es de la forma $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$. Indicación: considerar $u = f'$ y aplicar el problema anterior.

**25.** El límite $\lim_{N\to\infty} \int_a^N f$, si existe, se designa por $\int_a^\infty f$ (o $\int_a^\infty f(x)\,dx$), y se le denomina “integral impropia”.

(a) Determinar $\int_1^\infty x^r\,dx$, si $r < -1$.

(b) Utilizar el Problema 13-15 para demostrar que $\int_1^\infty 1/x\,dx$ no existe. Indicación: ¿qué se puede decir de $\int_1^{2^n} 1/x\,dx$?

(c) Suponer que $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$ y que $\int_0^\infty f$ existe. Demostrar que si $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo $x \geq 0$, y $g$ es integrable en cada intervalo $[0,N]$, entonces también existe $\int_0^\infty g$.

(d) Explicar por qué $\int_0^\infty 1/(1+x^2)\,dx$ existe. Indicación: separar esta integral en 1.

**26.** Decidir si las siguientes integrales impropias existen.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{3/2}}\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx$ (en realidad, este tipo ya se consideró en el Problema 28).

**27.** La integral impropia $\int_{-\infty}^a f$ se define,obviamente, como $\lim_{N\to-\infty} \int_N^a f$. Pero otro tipo de integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f$ se define de una manera no tan evidente: es igual a $\int_0^\infty f + \int_{-\infty}^0 f$, siempre y cuando ambas integrales impropias existan.

(a) Explicar por qué $\int_{-\infty}^\infty 1/(1+x^2)\,dx$ existe.

(b) Explicar por qué no existe $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ . (Obsérvese, sin embargo, que $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N x\,dx$ *sí* existe.)

(c) Demostrar que si $\int_{-\infty}^\infty f$ existe, entonces existe $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N f$ y es igual a $\int_{-\infty}^\infty f$. Demostrar, además, que $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N+1} f$ y $\lim_{N\to\infty} \int_{-N^2}^{N} f$ existen ambos y son iguales a $\int_{-\infty}^\infty f$. ¿Puede dar el lector una generalización razonable a estos hechos? (En caso contrario, le será difícil tratar estos casos particulares).

**28.** Existe otro tipo de “integral impropia” en la cual el intervalo está acotado, pero la *función* no está acotada:

(a) Si $a > 0$, hallar $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^a 1/\sqrt{x}\,dx$. Este límite se designa mediante $\int_0^a 1/\sqrt{x}\,dx$, incluso aunque la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ no está acotada en $[0,a]$, independientemente de cómo se defina $f(0)$.

(b) Hallar $\int_0^a x^r\,dx$ si $-1 < r < 0$.

(c) Utilizar el Problema 13-15 para demostrar que $\int_0^a x^{-1}\,dx$ no tiene sentido, ni siquiera como límite.

(d) Inventar una definición razonable de $\int_a^0 |x|^r\,dx$ para $a < 0$ y calcularla para $-1 < r < 0$.

(e) Inventar una definición razonable de $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2}\,dx$, como una suma de dos límites, y demostrar que los límites existen. Indicación: ¿por qué existe $\int_{-1}^0 (1+x)^{-1/2}\,dx$ ? ¿Cómo es $(1+x)^{-1/2}$ comparado con $(1-x^2)^{-1/2}$ para $-1 < x < 0$?

**29.** (a) Si $f$ es continua en $[0,1]$, calcular $\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$.

*(b) Si $f$ es integrable en $[0,1]$ y continua en 0, calcular

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}dt.$$

**30.** Es posible, finalmente, combinar las dos extensiones posibles del concepto de integral.

(a) Si $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 1/x^2$ para $x \geq 1$, hallar $\int_0^\infty f(x)\,dx$ (una vez decidido cuál debe ser su significado).

(b) Demostrar que $\int_0^\infty x^r\,dx$ nunca tiene sentido. (Distinguir los casos $-1 < r < 0$ y $r < -1$. En uno de los casos el fallo está en 0, y en el otro en $\infty$; para $r = -1$ el fallo está en ambos sitios).

# Las funciones trigonométricas

# 15

Las definiciones de las funciones *sen* y *cos* son considerablemente más sutiles de lo que se podría sospechar. Por esta razón, este capítulo comienza con algunas definiciones informales e intuitivas, que no deben ser analizadas demasiado rigurosamente ya que pronto serán substituidas por las definiciones formales que son las que nos interesa utilizar en realidad.

En geometría elemental un ángulo se define como la unión de dos semirrectas con un punto inicial común (Figura 1).

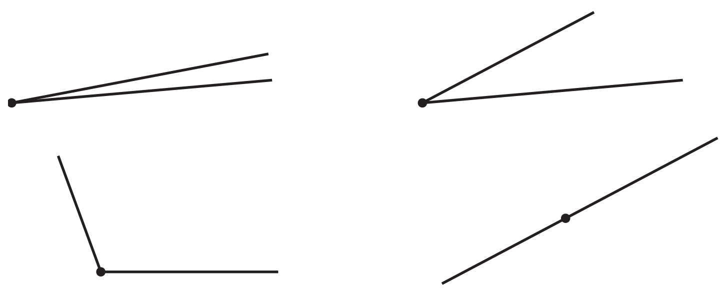


**Figura 1**

En trigonometría son más útiles los "ángulos dirigidos,´´ que pueden considerarse como pares de semirrectas $(l_1, l_2)$ con el mismo punto inicial, visualizadas como las de la Figura 2.

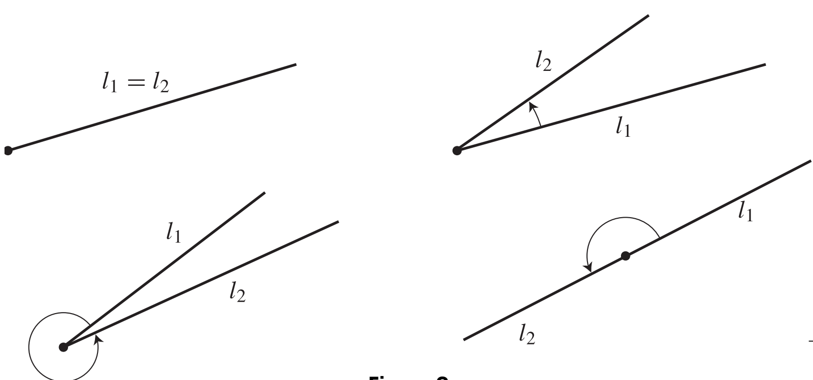



**Figura 2**

Si siempre se elige como $l_1$ la mitad positiva del eje horizontal, un ángulo dirigido queda completamente determinado por la segunda semirrecta (Figura 3).

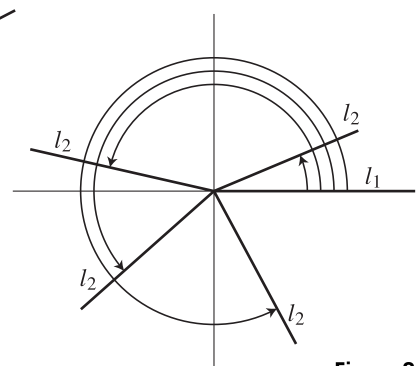



**Figura 3**

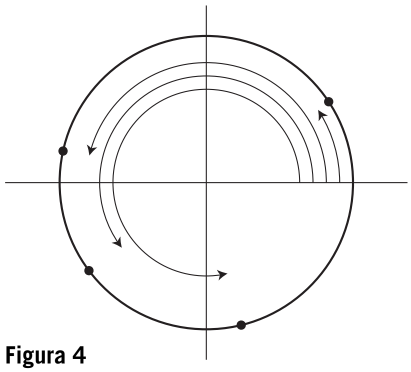


**Figura 4**

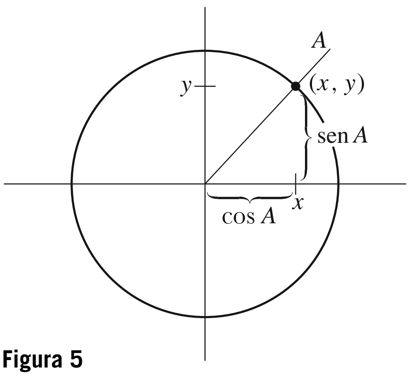



**Figura 5**

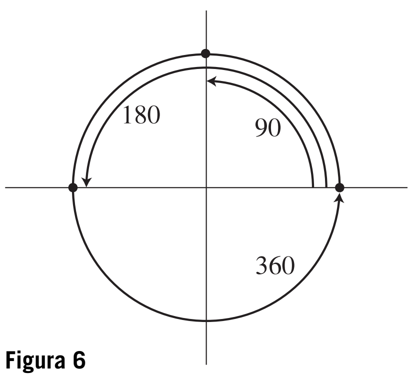



**Figura 6**

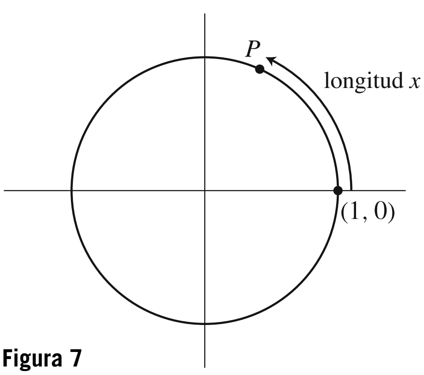



**Figura 7**

Como cada semirrecta corta al círculo unidad exactamente una vez, un ángulo dirigido puede describirse todavía de una manera más sencilla, mediante un punto del círculo unidad (Figura 4), es decir, mediante un punto $(x, y)$ con $x^2 + y^2 = 1$.

Ahora es posible definir el seno y el coseno de un ángulo dirigido de la manera siguiente (Figura 5): un ángulo dirigido está determinado por un punto $(x, y)$ con $x^2 + y^2 = 1$; el seno del ángulo se define como $y$, y el coseno como $x$.

A pesar del aura de precisión que envuelve al párrafo anterior, todavía no hemos acabado con las definiciones de *sen* y *cos*. Efectivamente, no hemos hecho más que empezar. Lo que hemos definido es el seno y el coseno de un ángulo dirigido; lo que queremos definir es el *sen x* y el *cos x* para cada *número x*. El procedimiento usual para hacerlo consiste en asociar un ángulo a cada número. El método más antiguo se basa en “medir los ángulos en grados”. Un ángulo completo (o perigonal) se asocia con 360, un ángulo llano se asocia con 180, un ángulo recto con 90, etc. (Figura 6). El ángulo asociado de esta manera con el número $x$, se denomina “ángulo de $x$ grados”. El ángulo de 0 grados es el mismo que el ángulo de 360 grados, y esta ambigüedad se hace extensible intencionadamente a los demás casos, de manera que, por ejemplo, un ángulo de 90 grados es también un ángulo de $360 + 90$ grados, etc. Ahora es posible definir una función, que representaremos mediante $\text{sen}^\circ$, de la manera siguiente:

$$\text{sen}^\circ(x) = \text{seno del ángulo de } x \text{ grados.}$$

Este método tiene dos dificultades. Aunque puede estar claro lo que significa un ángulo de 90 o 45 grados, no resulta tan obvio el significado de un ángulo de $\sqrt{2}$ grados. Incluso aunque esta dificultad pudiera subsanarse, no es probable que este método, basado en la elección arbitraria del valor de 360, conduzca a resultados elegantes –sería realmente pura casualidad que la función $\text{sen}^\circ$ tuviese propiedades matemáticas agradables.

La “medida en‘radianes” permite remediar ambos defectos. Dado cualquier número $x$, elijamos un punto $P$ del círculo unidad tal que $x$ es la longitud del arco que comienza en $(1, 0)$ y se extiende, en sentido contrario a las agujas del reloj, hasta el punto $P$ (Figura 7). El ángulo dirigido determinado por $P$ se denomina el “ángulo de $x$ radianes”. Como la longitud de la circunferencia es $2\pi$, el ángulo de $x$ radianes y el ángulo de $2\pi + x$ radianes son idénticos. Ahora podemos definir una función $\text{sen}^r$ de la manera siguiente:

$$\text{sen}^r(x) = \text{seno del ángulo de } x \text{ radianes.}$$

Este mismo método puede adoptarse fácilmente para definir $\operatorname{sen}^{\circ}$; como debe verificarse que $\operatorname{sen}^{\circ} 360 = \operatorname{sen}^{r} 2\pi$, podemos definir

$$\operatorname{sen}^{\circ} x = \operatorname{sen}^{r} \frac{2\pi x}{360} = \operatorname{sen}^{r} \frac{\pi x}{180}.$$

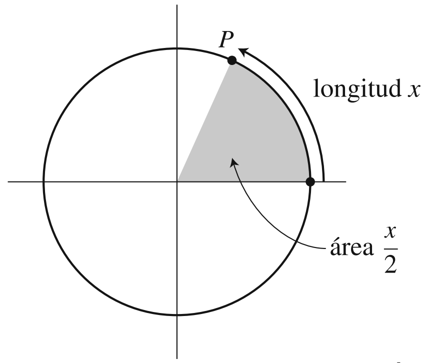



Figura 8

Pronto abandonaremos el superíndice $r$ en $\operatorname{sen}^{r}$, ya que $\operatorname{sen}^{r}$ (y no $\operatorname{sen}^{\circ}$) es la única función que nos va a interesar; antes, sin embargo, debemos hacer algunas advertencias.

Las expresiones $\operatorname{sen}^{\circ} x$ y $\operatorname{sen}^{r} x$ a veces se escriben

$$\operatorname{sen} x^{\circ}$$
$$\operatorname{sen} x \text{ radianes},$$

pero esta notación induce a confusión; un número $x$ es simplemente un número –no lleva un distintivo que indique que se expresa en “grados” o en “radianes”. Si no está claro el significado de la notación “$\operatorname{sen} x$”, generalmente suele preguntarse:

“¿$x$ se expresa en grados o radianes?”

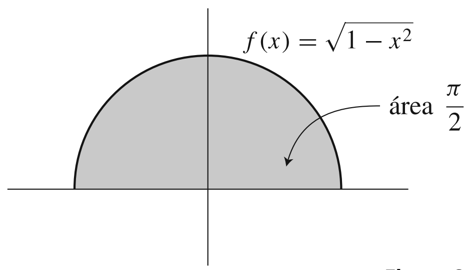



Figura 9

pero lo que realmente se pretende saber es si la notación $\operatorname{sen} x$ se refiere a $\operatorname{sen}^{\circ}$ o $\operatorname{sen}^{r}$. Incluso para los matemáticos más adictos a la precisión, estas observaciones no constituirían un problema relevante si no fuese porque al no tenerlas en cuenta pueden cometerse errores en la resolución de algunos problemas (en el Problema 19 se da un ejemplo concreto de esta posibilidad).

Aunque la función $\operatorname{sen}^{r}$ es la que deseamos denotar simplemente por sen (y utilizarla exclusivamente de ahora en adelante), existe una dificultad inherente en la definición de $\operatorname{sen}^{r}$. La definición que hemos propuesto depende del concepto de longitud de una curva. Aunque en algunos problemas ya hemos definido el concepto de longitud de una curva, es fácil también reformular la definición en términos de áreas (en el Problema 28 se indica una construcción de las funciones trigonométricas en términos de la longitud.)

Supongamos que $x$ es la longitud del arco del círculo unidad, que va desde $(1,0)$ a $P$; este arco contiene pues $x/2\pi$ de la longitud total de la circunferencia del círculo unidad. Sea $S$ el “sector” que se muestra en la Figura 8; $S$ está limitado por el círculo unidad, el eje horizontal y la semirrecta que va desde $(0,0)$ a $P$. El área de $S$ ha de ser igual a $x/2\pi$ veces el área del círculo unidad, la cual vale $\pi$; por tanto, $S$ debe tener un área igual a

$$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2}.$$

De manera que podemos definir $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ como las coordenadas del punto $P$ que determina un sector de área $x/2$.

Basándonos en estas observaciones, estamos ya en condiciones de dar una definición rigurosa de las funciones sen y cos. La primera definición identifica a $\pi$ como el área del círculo unidad –más concretamente como el doble del área del semicírculo (Figura 9).

**Definición**

$$\pi = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

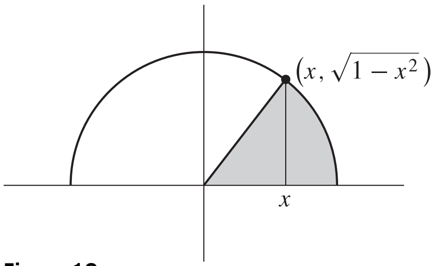



**Figura 10**

(Esta definición no se da tan sólo por motivos estéticos; para definir las funciones trigonométricas será necesario definir primero $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ sólo para $0 \le x \le \pi$.)

La segunda definición describe el área $A(x)$ del sector limitado por el círculo unidad, el eje horizontal y la semirrecta que corta al círculo unidad en el punto $(x, \sqrt{1-x^2})$ para $-1 \le x \le 1$. Si $0 \le x \le 1$, dicha área puede expresarse (Figura 10) como la suma del área de un triángulo y el área de una región en el círculo unidad:

$$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

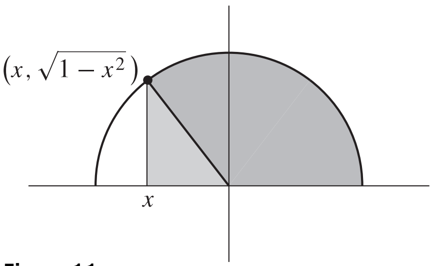



**Figura 11**

La misma fórmula es válida también para $-1 \le x \le 0$. En este caso (Figura 11), el término

$$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

es negativo, y representa el área del triángulo que debe sustraerse del término

$$\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

**Definición**

Si $-1 \le x \le 1$, entonces

$$\boldsymbol{A(x)} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

Obsérvese que si $-1 < x < 1$, entonces $A$ es diferenciable en $x$ y (utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo),

$$\begin{aligned}
A'(x) &= \frac{1}{2}\left[x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right] - \sqrt{1-x^2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-x^2 + (1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right] - \sqrt{1-x^2} \\
&= \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\
&= \frac{1-2x^2-2(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Obsérvese también (Figura 12) que en el intervalo $[-1,1]$ la función $A$ decrece desde

$$A(-1) = 0 + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

hasta $A(1) = 0$. Esto se deduce directamente de la definición de $A$, y también del hecho de que la derivada $A'(x)$ es negativa en $(-1,1)$.

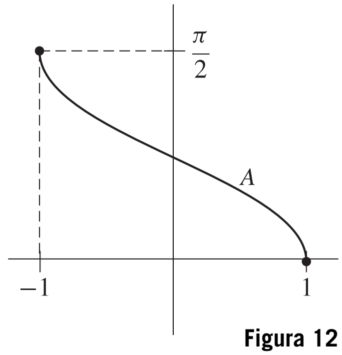



**Figura 12**

Para $0 \leq x \leq \pi$ deseamos ahora definir $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ como las coordenadas de un punto $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ del círculo unidad, que determina un sector cuya área es $x/2$ (Figura 13). En otras palabras:

**Definición**

Si $0 \leq x \leq \pi$, entonces $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$ es el único número de $[-1,1]$ tal que

$$A(\cos x) = \frac{x}{2};$$

y

$$\mathbf{sen}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{1-(\cos x)^2}.$$

Esta definición requiere una justificación. El hecho de que $A$ sea continua y tome los valores 0 y $\pi/2$ nos asegura la existencia de un número $y$ tal que $A(y) = x/2$ . Esta referencia tácita al Teorema del Valor Intermedio es crucial si queremos que nuestra definición preliminar sea precisa. Habiendo pues justificado la definición, ahora podemos proseguir más rápidamente.

**Teorema 1.** *Si* $0 < x < \pi$, *entonces*

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= -\operatorname{sen} x, \\ \operatorname{sen}'(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

**Demostración** Si $B = 2A$, entonces la definición $A(\cos x) = x/2$ puede escribirse como

$$B(\cos x) = x;$$

en otras palabras, cos es precisamente la inversa de $B$. Ya hemos demostrado que

$$A'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

de lo cual podemos deducir que

$$B'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Por consiguiente,

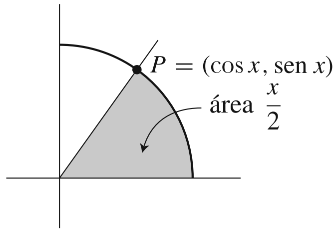



**Figura 13**

$$
\begin{aligned}
\cos'(x) &= (B^{-1})'(x) \\
&= \frac{1}{B'(B^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{-\dfrac{1}{\sqrt{1-[B^{-1}(x)]^2}}} \\
&= -\sqrt{1-(\cos x)^2} \\
&= -\operatorname{sen} x.
\end{aligned}
$$

Ya que

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-(\cos x)^2},$$

obtenemos también

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cos x\cdot\cos'(x)}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} \\
&= \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \cos x.
\end{aligned}
$$

■

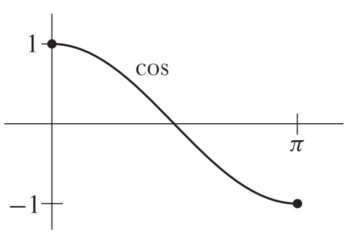



**Figura 14**

La información contenida en el Teorema 1 puede utilizarse para representar las gráficas de sen y cos en el intervalo $[0,\pi]$. Como

$$\cos'(x) = -\operatorname{sen} x < 0, \quad 0 < x < \pi,$$

la función cos decrece desde $\cos 0 = 1$ hasta $\cos\pi = -1$ (Figura 14). Por tanto, $\cos y = 0$ para un único $y$ del intervalo $[0,\pi]$. Para hallar dicho $y$, observemos que la definición de la función cos,

$$A(\cos x) = \frac{x}{2},$$

significa que

$$A(0) = \frac{y}{2},$$

de manera que

$$y = 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

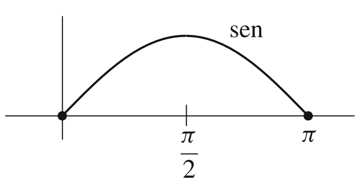



**Figura 15**

Es fácil comprobar que

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

por tanto, podemos escribir

$$y = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Se verifica igualmente que

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x \begin{cases} > 0, & 0 < x < \pi/2 \\ < 0, & \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$$

de manera que sen incrementa en $[0, \pi/2]$ desde $\operatorname{sen} 0 = 0$ hasta $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$, y luego decrece en $[\pi/2, \pi]$ hasta $\operatorname{sen} \pi = 0$ (Figura 15).

Para valores de $x$ fuera del intervalo $[0, \pi]$, los valores de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ pueden definirse mediante un procedimiento sencillo que consta de dos etapas:

(1) Si $\pi \leq x \leq 2\pi$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= -\operatorname{sen}(2\pi - x), \\ \cos x &= \cos(2\pi - x). \end{aligned}$$

En la Figura 16 se muestran las gráficas de sen y cos en el intervalo $[0, 2\pi]$.

(2) Si $x = 2\pi k + x'$ para algún entero $k$, y algún $x'$ de $[0, 2\pi]$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x', \\ \cos x &= \cos x'. \end{aligned}$$

En la Figura 17 se muestran las gráficas de sen y cos, funciones definidas ahora en todo $\mathbf{R}$.

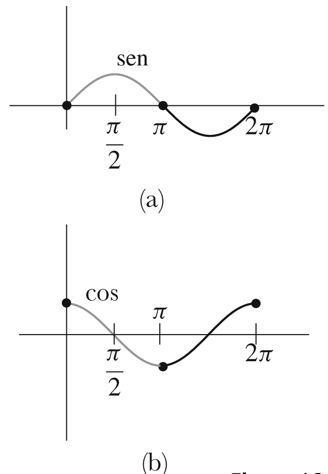



**Figura 16**

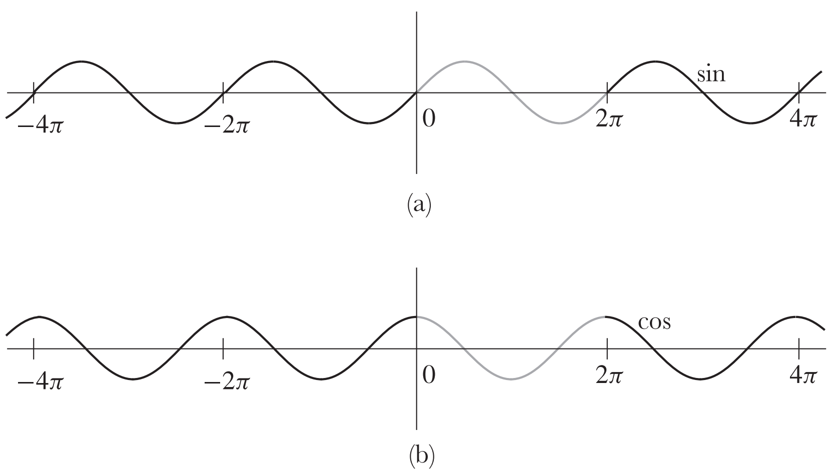



**Figura 17**

Habiendo extendido las funciones sen y cos a $\mathbf{R}$, ahora debemos comprobar que continúan verificando sus propiedades básicas. Esto es fácil en la mayoría de los casos. Por ejemplo, está claro que, para todo $x$, se verifica la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Tampoco es difícil demostrar que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= \cos x, \\ \cos'(x) &= -\operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

si $x$ no es un múltiplo de $\pi$. Por ejemplo, si $\pi < x < 2\pi$, entonces

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x),$$

de manera que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= -\operatorname{sen}'(2\pi - x) \cdot (-1) \\ &= \cos(2\pi - x) \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Si $x$ es un múltiplo de $\pi$ , recurrimos a un artilugio; tan sólo es necesario aplicar el Teorema 11-7 para deducir que, también en este caso, se verifican las mismas fórmulas.

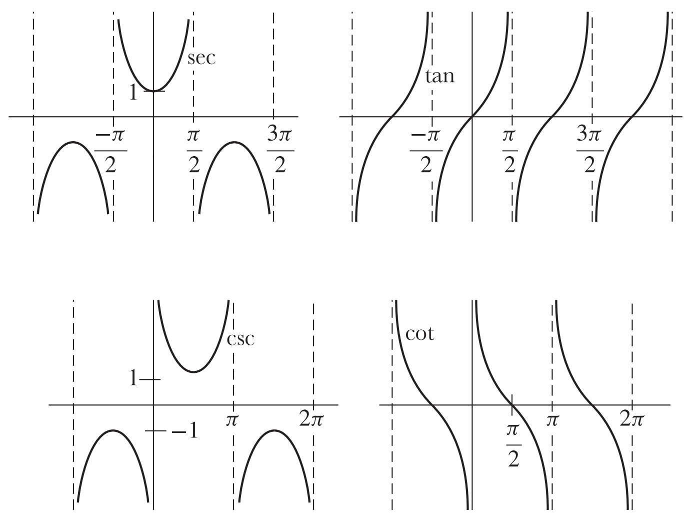



**Figura 18**

Las restantes funciones trigonométricas estándar no presentan ninguna dificultad. Definimos

$$\left.\begin{aligned} \sec x &= \frac{1}{\cos x} \\ \tan x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \end{aligned}\right\} x \neq k\pi + \pi/2,$$

$$\left.\begin{aligned} \csc x &= \frac{1}{\operatorname{sen} x} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}\right\} x \neq k\pi.$$

Las gráficas se representan en la Figura 18. Es aconsejable que el lector trate de convencerse de que las características generales de estas gráficas pueden predecirse a partir de las derivadas de dichas funciones, las cuales se resumen en el siguiente teorema (no es necesario memorizar las fórmulas ya que éstas pueden deducirse fácilmente en el momento en que se necesitan).

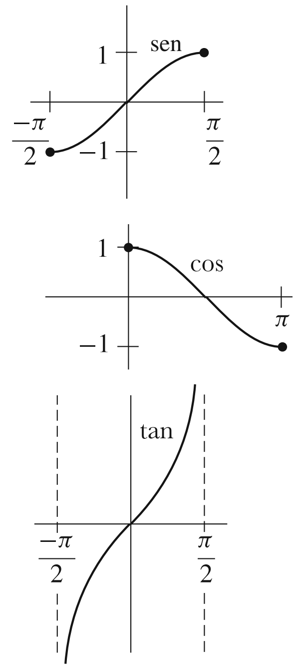



**Figura 19**

**Teorema 2.** *Si $x \neq k\pi + \pi/2$, entonces*

$$\sec'(x) = \sec x \tan x,$$
$$\tan'(x) = \sec^2 x.$$

*Si $x \neq k\pi$, entonces*

$$\csc'(x) = -\csc x \cot x,$$
$$\cot'(x) = -\csc^2 x.$$

**Demostración** Se deja como ejercicio para el lector (se trata de un cálculo directo, que no ofrece ninguna dificultad). ■

Las inversas de las funciones trigonométricas también se pueden diferenciar fácilmente. Las funciones trigonométricas no son uno-a-uno, por lo tanto, para considerar sus inversas, deben restringirse a determinados intervalos; la mayor longitud del intervalo que se puede conseguir es $\pi$, y los intervalos que se utilizan normalmente son (Figura 19)

| | |
|---|---|
| $[-\pi/2, \pi/2]$ | para sen, |
| $[0, \pi]$ | para cos, |
| $(-\pi/2, \pi/2)$ | para tan. |

(Las inversas de las restantes funciones trigonométricas se utilizan tan raramente que ni siquiera las mencionaremos).

La inversa de la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

se denomina **"arcsen"** (Figura 20); el dominio de arcsen es $[-1, 1]$. Se ha evitado utilizar la notación $\operatorname{sen}^{-1}$ ya que la función arcsen no es la inversa de sen (la cual no es uno-a-uno), sino de la función $f$ que es la restricción de sen al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$; a veces la función restringida $f$ se denota mediante Sin, y arcsen mediante $\operatorname{Sin}^{-1}$.

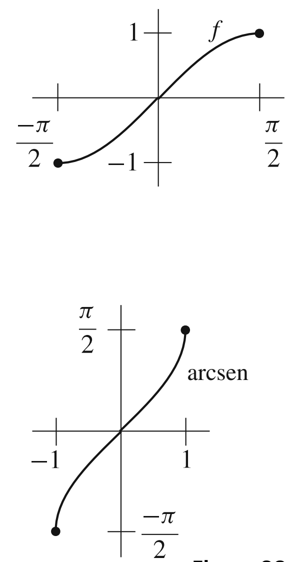



**Figura 20**

La inversa de la función

$$g(x) = \cos x, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

se denomina **"arccos"** (Figura 21); el dominio de arccos es $[-1, 1]$. A veces $g$ se representa mediante Cos, y arccos mediante $\operatorname{Cos}^{-1}$.

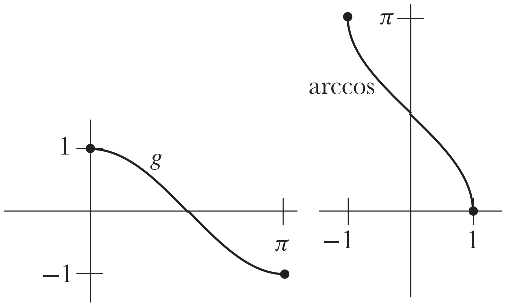



Figura 21

La inversa de la función

$$h(x) = \tan x, \qquad -\pi/2 < x < \pi/2$$

se denomina **“arctan”** (Figura 22); arctan constituye uno de los ejemplos sencillos de una función diferenciable que está acotada aunque es uno-a-uno en todo **R**. A veces la función $h$ se representa mediante Tan, y arctan mediante $\mathrm{Tan}^{-1}$.

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son sorprendentemente sencillas y no incluyen a funciones trigonométricas. No es difícil calcular dichas derivadas, pero para expresarlas de manera adecuada deberemos simplificar expresiones como

$$\cos(\operatorname{arcsen} x), \qquad \sec(\arctan x).$$

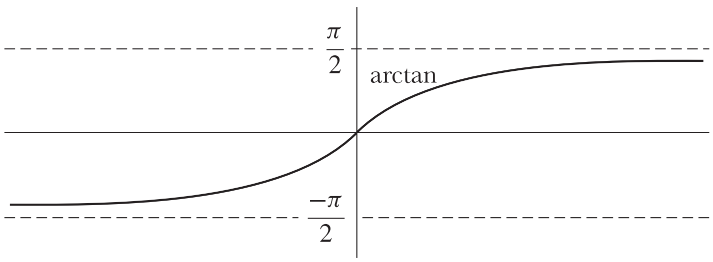



Figura 22

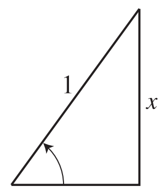



Figura 23

Un pequeño dibujo es la mejor manera de recordar las simplificaciones correctas. Por ejemplo, en la Figura 23 se representa a un ángulo dirigido cuyo seno es $x$ –dicho ángulo es, pues, un ángulo de $(\operatorname{arcsen} x)$ radianes; por consiguiente, $\cos(\operatorname{arcsen} x)$ es la longitud del otro lado, o sea $\sqrt{1-x^2}$. Sin embargo, en la demostración del siguiente teorema no recurriremos a dibujos de este tipo.

**Teorema 3.** *Si* $-1 < x < 1$*, entonces*

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*Además, para todo x se verifica*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsen}'(x) &= (f^{-1})'(x)\\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arcsen} x)}\\ &= \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}.\end{aligned}$$

Sabemos que

$$[\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)]^2 + [\cos(\operatorname{arcsen} x)]^2 = 1,$$

es decir,

$$x^2 + [\cos(\operatorname{arcsen} x)]^2 = 1;$$

por tanto,

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}.$$

(Debe tomarse la raíz cuadrada positiva ya que $\operatorname{arcsen} x$ se encuentra en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, de manera que $\cos(\operatorname{arcsen} x) > 0$.) Esto demuestra la primera fórmula.

La segunda fórmula ya se ha establecido (en la demostración del Teorema 1). El lector puede también imitar la demostración de la primera fórmula, ejercicio muy recomendable si dicha demostración le supuso alguna dificultad. La tercera fórmula se demuestra de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\arctan'(x) &= (h^{-1})'(x) \\
&= \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{\sec^2(\arctan x)}
\end{aligned}$$

Dividiendo ambos miembros de la identidad

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

por $\cos^2 a$ , obtenemos

$$\tan^2 a + 1 = \sec^2 a.$$

de lo cual se deduce que

$$[\tan(\arctan x)]^2 + 1 = \sec^2(\arctan x),$$

es decir

$$x^2 + 1 = \sec^2(\arctan x),$$

lo que demuestra la tercera fórmula. ∎

En el Problema 27 se esboza la demostración tradicional de la fórmula $\operatorname{sen}'(x) = \cos x$ (muy distinta a la demostración que hemos dado aquí). Dicha demostración tradicional se basa en establecer primero que el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1,$$

y en la “fórmula de la adición”

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y.$$

Ambas fórmulas pueden deducirse fácilmente ahora que ya conocemos la derivada de sen y cos. La primera no es más que el caso particular $\operatorname{sen}'(0) = \cos 0$. La segunda depende de una caracterización elegante de las funciones sen y cos. Para deducir este resultado se necesita un lema cuya demostración incluye un sagaz artilugio; en la Parte IV daremos una demostración más convencional.

**Lema.** *Supóngase que $f$ admite una segunda derivada en cualquier punto y que*

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0. \end{aligned}$$

*Entonces $f = 0$.*

**Demostración** Multiplicando ambos lados de la primera ecuación por $f'$ ,obtenemos

$$f'f'' + ff' = 0.$$

Así

$$[(f')^2 + f^2]' = 2(f'f'' + ff') = 0,$$

por tanto $(f')^2 + f^2$ es una función constante. Como por hipótesis $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$ deducimos que la constante es igual a 0; así

$$[f'(x)]^2 + [f(x)]^2 = 0 \quad \text{para todo } x.$$

Esto implica que

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x. \qquad \blacksquare$$

**Teorema 4.** *Si $f$ admite una segunda derivada en cualquier punto y*

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= a, \\ f'(0) &= b, \end{aligned}$$

*entonces*

$$f = b \cdot \operatorname{sen} + a \cdot \cos.$$

*(En particular, si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, entonces $f = \operatorname{sen}$; si $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$, entonces $f = \cos$.)*

**Demostración** Sea

$$g(x) = f(x) - b \operatorname{sen} x - a \cos x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - b \cos x + a \operatorname{sen} x, \\ g''(x) &= f''(x) + b \operatorname{sen} x + a \cos x. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} g'' + g &= 0, \\ g(0) &= 0, \\ g'(0) &= 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$0 = g(x) = f(x) - b\,\text{sen}\,x - a\cos x, \qquad \text{para todo } x. \qquad \blacksquare$$

**Teorema 5.** *Si x e y son dos números cualesquiera, entonces*

$$\begin{aligned} \text{sen}(x+y) &= \text{sen}\,x\cos y + \cos x\,\text{sen}\,y, \\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y. \end{aligned}$$

**Demostración** Dado un número $y$ cualquiera, podemos definir una función $f$ mediante

$$f(x) = \text{sen}(x+y).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x+y) \\ f''(x) &= -\,\text{sen}(x+y). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= \text{sen}\,y, \\ f'(0) &= \cos y. \end{aligned}$$

Deducimos pues, según el Teorema 4, que

$$f = (\cos y)\cdot\text{sen} + (\text{sen}\,y)\cdot\cos;$$

es decir,

$$\text{sen}(x+y) = \cos y\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,y\cos x, \qquad \text{para todo } x.$$

Como el número $y$ elegido podía ser cualquiera, esto demuestra la primera fórmula para todo $x$ y todo $y$.

La segunda fórmula se demuestra de una manera análoga. ■

Para concluir este capítulo, y como un preludio al Capítulo 18, mencionaremos un método alternativo de definir la función sen. Ya que

$$\text{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para } -1 < x < 1,$$

deducimos, según el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, que

$$\text{arcsen}\,x = \text{arcsen}\,x - \text{arcsen}\,0 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Esta ecuación se podía haber tomado como la *definición* de arcsen. De aquí se deduciría inmediatamente que

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

la función sen se definiría entonces como $(\operatorname{arcsen})^{-1}$ , y la fórmula de derivación de la función inversa permitiría demostrar que

$$\operatorname{sen}'(x) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x},$$

la cual podría definirse como $\cos x$. Por último, se demostraría que $A(\cos x) = x/2$, recuperando al final de todo este desarrollo la definición con la que comenzamos. A pesar de que este método es más rápido, la definición resultaría totalmente desmotivada; sólo el autor conocería los detalles y pormenores de todo el razonamiento, no el estudiante que es a quien va dirigido. Sin embargo, como veremos en el Capítulo 18, este tipo de métodos son a veces los más adecuados.

## Problemas

**1.** Diferenciar cada una de las siguientes funciones.

(i) $f(x) = \arctan(\arctan(\arctan x))$.

(ii) $f(x) = \operatorname{arcsen}(\arctan(\operatorname{arc}\cos x))$.

(iii) $f(x) = \arctan(\tan x \arctan x)$.

(iv) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

**2.** Hallar los siguientes límites aplicando la Regla de l'Hôpital.

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^3}$.

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^4}$.

(iii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^2}$.

(iv) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$.

(v) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x + x^3/3}{x^3}$.

(vi) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

**3.** Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

(a) Hallar $f'(0)$.

(b) Hallar $f''(0)$.

A este nivel el lector deberá aplicar, casi con toda seguridad, la regla de l'Hôpital, pero en el Capítulo 24 utilizaremos un método que permitirá calcular $f^{(k)}(0)$ para todo $k$, casi sin ninguna dificultad.

**4.** Representar gráficamente las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$.

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. (Puede obtenerse una gráfica bastante aceptable de esta función utilizando únicamente un esquema de la gráfica de sen. En efecto, la única posibilidad que tiene el lector en este problema es dejarse llevar por el puro razonamiento, ya que determinar el signo de la derivada $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$ no es más fácil que determinar el comportamiento de $f$ directamente. Sin embargo, la fórmula de $f'(x)$ si que indica un hecho importante —$f'(0) = 0$, lo cual debe ser cierto ya que $f$ es par, y además debería resultar aparente en la gráfica dibujada por el lector).

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$. (Seguramente resultará instructivo dibujar cuidadosamente primero las gráficas de $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(x) = \operatorname{sen} 2x$ en el mismo sistema de ejes de coordenadas, desde 0 hasta $2\pi$, y tratar de intuir cómo será el aspecto de la suma. El lector puede calcular fácilmente cuántos puntos críticos posee $f$ en $[0, 2\pi]$ considerando la derivada de $f$. Luego puede determinar la naturaleza de estos puntos críticos calculando el signo de $f$ en cada punto; la gráfica sugerirá, probablemente, la respuesta).

(d) $f(x) = \tan x - x$. (Determinar primero el comportamiento de $f$ en $(-\pi/2, \pi/2)$; en los intervalos $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$ la gráfica de $f$ será la misma aunque desplazada una cierta cantidad. ¿Por qué?)

(e) $f(x) = \operatorname{sen} x - x$. (En el caso de esta función será especialmente útil el material del Apéndice del Capítulo 11).

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

(El apartado (d) debería permitir al lector determinar, aproximadamente, donde se localizan los ceros de $f'$ . Obsérvese que $f$ es par y continua en 0; considérese también el valor de $f$ para valores grandes de $x$).

(g) $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

***5.** La *espiral hiperbólica* es la gráfica de la función $f(\theta) = a/\theta$ en coordenadas polares (Capítulo 4, Apéndice 3). Representar gráficamente dicha curva, prestando atención sobretodo a su comportamiento cuando $\theta$ se aproxima a 0.

**6.** Demostrar la fórmula de la adición para cos.

**7.** (a) A partir de la fórmula de la adición para sen y cos deducir fórmulas para $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$.

(b) Utilizar estas fórmulas para hallar los siguientes valores de las funciones trigonométricas (deducidos normalmente, en trigonometria elemental, utilizando argumentos geométricos):

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \tan \frac{\pi}{4} &= 1, \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

**8.** (a) Demostrar que $A\,\mathrm{sen}(x+B)$ puede escribirse como $a\,\mathrm{sen}\,x+b\cos x$ para valores adecuados de $a$ y $b$. (Uno de los teoremas de este capítulo permite dar una demostración de una línea. El lector debería intuir también qué valores han de tener $a$ y $b$).

(b) Recíprocamente, dados $a$ y $b$, hallar números $A$ y $B$ tales que $a\,\mathrm{sen}\,x+b\cos x = A\,\mathrm{sen}(x+B)$ para todo $x$.

(c) Utilizar el apartado (b) para trazar la gráfica de $f(x)=\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x+\cos x$.

**9.** (a) Demostrar que

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

si $x$, $y$, y $x+y$ no son de la forma $k\pi+\pi/2$. (Utilizar las fórmulas de la adición para sen y cos.)

(b) Demostrar que

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$

indicando las restricciones necesarias que han de verificar $x$ e $y$. Indicación: sustituir $x$ por $\arctan x$ e $y$ por $\arctan y$ en el apartado (a).

**10.** Demostrar que

$$\mathrm{arcsen}\,\alpha+\mathrm{arcsen}\,\beta=\mathrm{arcsen}\big(\alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2}\big),$$

indicando las restricciones que deben satisfacer $\alpha$ y $\beta$.

**11.** Demostrar que si $m$ y $n$ son números cualesquiera, entonces

$$\mathrm{sen}\,mx\,\mathrm{sen}\,nx=\tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x],$$

$$\mathrm{sen}\,mx\cos nx=\tfrac{1}{2}[\mathrm{sen}(m+n)x+\mathrm{sen}(m-n)x],$$

$$\cos mx\cos nx=\tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x].$$

**12.** Demostrar que si $m$ y $n$ son números naturales, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\,mx\,\mathrm{sen}\,nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n,\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n,\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\,mx\cos nx\,dx=0.$$

Estas relaciones son particularmente relevantes en la teoría de las “series de Fourier”. Aunque a este tema le dedicaremos una atención algo más detallada sólo en las Lecturas Recomendadas (véase la referencia [26]), el siguiente problema permite hacerse una idea de su importancia.

**13.** (a) Si $f$ es integrable en $[-\pi,\pi]$, demostrar que el valor mínimo de

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-a\cos nx)^2\,dx$$

se alcanza cuando

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

y que el valor mínimo de

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a \operatorname{sen} nx)^2\,dx$$

se alcanza cuando

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx.$$

(En cada caso, sacar $a$ fuera del signo integral, obteniendo una expresión cuadrática en $a$.)

(b) Definir

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Demostrar que si $c_i$ y $d_i$ son números cualesquiera, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos nx + d_n \operatorname{sen} nx\right]\right)^2 dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx - 2\pi\left(\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n c_n + b_n d_n\right) + \pi\left(\frac{c_0{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n{}^2 + d_n{}^2\right)$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx - \pi\left(\frac{a_0{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n{}^2 + b_n{}^2\right)$$
$$+\pi\left(\left(\frac{c_0}{\sqrt{2}} - \frac{a_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sum_{n=1}^{N} (c_n - a_n)^2 + (d_n - b_n)^2\right),$$

demostrando así que la primera integral alcanza un valor mínimo cuando $a_i = c_i$ y $b_i = d_i$. En otras palabras, entre todas las "combinaciones lineales" de las funciones $s_n(x) = \operatorname{sen} nx$ y $c_n(x) = \cos nx$ para $1 \le n \le N$, la función particular

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

es la que presenta un "máximo ajuste" a $f$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

**14.** (a) Hallar una fórmula para $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$. (Obsérvese que, al hacerlo, también se obtiene una fórmula para $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y$.) Indicación: hallar primero una fórmula para $\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)$. ¿Qué ventaja supone hacer esto en primer lugar?

(b) Hallar también una fórmula para $\cos x + \cos y$ y $\cos x - \cos y$.

**15.** (a) Partiendo de la fórmula para $\cos 2x$, deducir fórmulas para $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ en términos de $\cos 2x$.

(b) Demostrar que

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

para $0 \le x \le \pi/2$.

(c) Utilizar el apartado (a) para hallar $\int_a^b \operatorname{sen}^2 x\,dx$ y $\int_a^b \cos^2 x\,dx$.

(d) Representar gráficamente a la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

**16.** Hallar $\operatorname{sen}(\arctan x)$ y $\cos(\arctan x)$ como expresiones que no incluyan funciones trigonométricas. Indicación: $y = \arctan x$ significa que $x = \tan y = \operatorname{sen} y/\cos y = \operatorname{sen} y/\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$.

**17.** Si $x = \tan u/2$, expresar $\operatorname{sen} u$ y $\cos u$ en términos de $x$. (Utilizar el Problema 16; las respuestas deben ser expresiones muy sencillas).

**18.** (a) Demostrar que $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$. (De hecho, hemos estado dibujando las gráficas de sen y cos como si esto fuese así).

(b) ¿A qué son iguales $\operatorname{arcsen}(\cos x)$ y $\arccos(\operatorname{sen} x)$?

**19.** (a) Hallar $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$. Indicación: la respuesta no es 45.

(b) Hallar $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

**20.** Hallar $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

**21.** (a) Definir las funciones $\operatorname{sen}^\circ$ y $\cos^\circ$ mediante $\operatorname{sen}^\circ(x) = \operatorname{sen}(\pi x/180)$ y $\cos^\circ(x) = \cos(\pi x/180)$. Hallar $(\operatorname{sen}^\circ)'$ y $(\cos^\circ)'$ en términos de estas mismas funciones.

(b) Hallar $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^\circ x}{x}$ y $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}^\circ \frac{1}{x}$.

**22.** Demostrar que todo punto del círculo unidad es de la forma $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ para por lo menos un número $\theta$ (y por lo tanto para infinitos).

**23.** (a) Demostrar que $\pi$ es la longitud máxima posible de un intervalo en el cual sen es uno-a-uno, y que un tal intervalo debe ser de la forma $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2]$ o $[2k\pi + \pi/2, 2(k+1)\pi - \pi/2]$.

(b) Supóngase que $g(x) = \operatorname{sen} x$ para $x$ en $(2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2)$ ¿A qué es igual $(g^{-1})'$?

**24.** Sea $f(x) = \sec x$ para $0 \le x \le \pi$. Hallar el dominio de $f^{-1}$ y hacer un esquema de su gráfica.

**25.** Demostrar que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| < |x-y|$ para todos los números $x \ne y$. Indicación: el mismo resultado, pero reemplazando $<$ por $\le$, es una consecuencia inmediata de un teorema bien conocido; a partir de dicho teorema, sólo se necesitan unas sencillas consideraciones suplementarias para mejorar el resultado de $\le$ a $<$.

***26.** Es un test de intuición excelente predecir el valor de

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}\lambda x\,dx.$$

Las funciones continuas deberían ser más accesibles a la intuición, pero una vez que se tiene la idea adecuada para una demostración el límite se puede hallar fácilmente para cualquier función integrable $f$.

(a) Demostrar que $\lim_{\lambda\to\infty} \int_c^d \operatorname{sen}\lambda x\,dx = 0$, calculando la integral explícitamente.

(b) Demostrar que si $s$ es una función escalonada en $[a,b]$ (terminología del Problema 13-26), entonces $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b s(x)\,\text{sen}\,\lambda x\,dx = 0$.

(c) Finalmente, utilizar el Problema 13-26 para demostrar que $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\,\text{sen}\,\lambda x\,dx = 0$ para cualquier función $f$ integrable en $[a,b]$. Este resultado, al igual que el obtenido en el Problema 12, desempeña un papel importante en la teoría de las "series de Fourier"; ; se conoce como el "Lema de Riemann-Lebesgue".

**27.** Este problema describe el método clásico empleado para el estudio de las funciones trigonométricas. El sector sombreado de la Figura 24 tiene un área igual a $x/2$.

(a) Considerando los triángulos $OAB$ y $OCB$ demostrar que si $0 < x < \pi/4$, entonces

$$\frac{\text{sen}\,x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{sen}\,x}{2\cos x}.$$

(b) Concluir que

$$\cos x < \frac{\text{sen}\,x}{x} < 1,$$

y demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x} = 1.$$

(c) Utilizar este límite para hallar

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

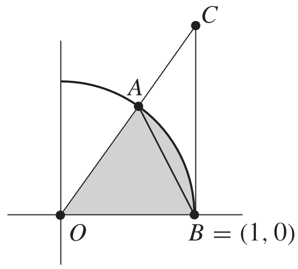



**Figura 24**

(d) Utilizando los apartados (b) y (c), y la fórmula de la adición para sen, hallar $\text{sen}'(x)$, comenzando con la definición de derivada.

***28.** En este problema se presenta un tratamiento de las funciones trigonométricas en términos de la longitud, y se utilizan los resultados del Problema 13-25. Sea $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ para $-1 \le x \le 1$. Defina $\mathscr{L}(x)$ como la longitud de $f$ en $[x,1]$.

(a) Demostrar que

$$\mathscr{L}(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

(Se trata de una integral impropia, tal como se definió en el Problema 14-28, por tanto primero se debe demostrar que la afirmación es cierta si la longitud posee un valor comprendido en el intervalo $[x, 1-\varepsilon]$ y luego demostrar que $\mathscr{L}(x)$ es el límite de estas longitudes cuando $\varepsilon \to 0^+$.)

(b) Demostrar que

$$\mathscr{L}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{para } -1 < x < 1.$$

(c) Defina $\pi$ como $\mathscr{L}(-1)$. Para $0 \le x \le \pi$, defina $\cos x$ como $\mathscr{L}(\cos x) = x$, y defina $\text{sen}\,x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Demostrar que $\cos'(x) = -\text{sen}\,x$ y $\text{sen}'(x) = \cos x$ para $0 < x < \pi$.

***29.** En el texto se definió también, brevemente, otro método para abordar el estudio de las funciones trigonométricas –comenzando con las funciones inversas definidas mediante integrales. Es conveniente comenzar con arctan, ya que esta función está definida en todo $x$. Para hacer este problema, el lector debe simular que nunca ha oído hablar de las funciones trigonométricas.

(a) Sea $\alpha(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-1}\,dt$. Demostrar que $\alpha$ es impar y creciente, y que $\lim_{x\to\infty} \alpha(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} \alpha(x)$ existen ambos, y son los negativos uno del otro. Si definimos $\pi = 2\lim_{x\to\infty} \alpha(x)$, entonces $\alpha^{-1}$ está definida en $(-\pi/2, \pi/2)$.

(b) Demostrar que $(\alpha^{-1})'(x) = 1 + [\alpha^{-1}(x)]^2$.

(c) Para $-\pi/2 < x < \pi/2$, definir $\tan x = \alpha^{-1}(x)$, y entonces definir $\operatorname{sen} x = \tan x/\sqrt{1+\tan^2 x}$. Demostrar que

(i) $\lim_{x\to\pi/2^-} \operatorname{sen} x = 1$

(ii) $\lim_{x\to-\pi/2^+} \operatorname{sen} x = -1$

(iii) $\operatorname{sen}'(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\tan x}, & -\pi/2 < x < \pi/2 \text{ y } x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(iv) $\operatorname{sen}''(x) = -\operatorname{sen} x$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

*30. Si se supone que ciertas ecuaciones diferenciales poseen soluciones, entonces es posible emplear otro método para el estudio de las funciones trigonométricas. Supóngase, en particular, que existe alguna función $y_0$ que no siempre vale 0 y que satisface $y_0'' + y_0 = 0$.

(a) Demostrar que $y_0{}^2 + (y_0')^2$ es constante, y concluir que o bien $y_0(0) \neq 0$ o $y_0'(0) \neq 0$.

(b) Demostrar que existe una función $s$ que satisface $s'' + s = 0$ y $s(0) = 0$ y $s'(0) = 1$. Indicación: probar $s$ de la forma $ay_0 + by_0'$.

Si definimos $\operatorname{sen} = s$ y $\cos = s'$, entonces casi todos los hechos relativos a las funciones trigonométricas son triviales. Sin embargo, existe un punto que requiere una atención especial –obtener el número $\pi$. La manera más fácil de hacerlo consiste en utilizar el ejercicio del Apéndice del Capítulo 11:

(c) Utilizar el Problema 6 del Apéndice del Capítulo 11 para demostrar que $\cos x$ no puede ser positivo para todo $x > 0$. De aquí se deduce que existe un menor $x_0 > 0$ con $\cos x_0 = 0$, y entonces se puede definir $\pi = 2x_0$.

(d) Demostrar que $\operatorname{sen}\pi/2 = 1$. (Como $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$, obtenemos $\operatorname{sen}\pi/2 = \pm 1$; el problema consiste en decidir por qué $\operatorname{sen}\pi/2$ es positivo).

(e) Hallar $\cos\pi$, $\operatorname{sen}\pi$, $\cos 2\pi$, y $\operatorname{sen} 2\pi$. (Naturalmente se puede utilizar cualquiera de las fórmulas de adición ya que éstas pueden deducirse una vez que sabemos que $\operatorname{sen}' = \cos$ y $\cos' = -\operatorname{sen}$.)

(f) Demostrar que cos y sen son periódicas, con periodo $2\pi$.

**31.** (a) Después de todo el trabajo que hemos dedicado a la definición de sen, sería desalentador observar que sen es una función racional. Demostrar que no lo es. (Existe una propiedad sencilla de la función sen que no la puede cumplir ninguna función racional excepto la función nula).

(b) Demostrar que sen no está ni siquiera definida implícitamente mediante una ecuación algebraica; es decir, no existen funciones racionales $f_0, \ldots, f_{n-1}$ tales que

$$(\operatorname{sen} x)^n + f_{n-1}(x)(\operatorname{sen} x)^{n-1} + \cdots + f_0(x) = 0 \quad \text{para todo } x.$$

Indicación: demostrar que $f_0 = 0$, de manera que $\operatorname{sen} x$ pueda sacarse factor común. El factor que queda es 0 excepto quizás para múltiplos de $\pi$. Pero esto implica que es 0 para todo $x$. (¿Por qué?) El lector está ahora preparado para una demostración por inducción.

*__32.__ Supóngase que $\phi_1$ y $\phi_2$ satisfacen

$$\begin{aligned}\phi_1{}'' + g_1\phi_1 &= 0,\\ \phi_2{}'' + g_2\phi_2 &= 0,\end{aligned}$$

y que $g_2 > g_1$.

(a) Demostrar que $\phi_1{}''\phi_2 - \phi_2{}''\phi_1 - (g_2 - g_1)\phi_1\phi_2 = 0$.

(b) Demostrar que si $\phi_1(x) > 0$ y $\phi_2(x) > 0$ para todo $x$ de $(a,b)$, entonces

$$\int_a^b [\phi_1{}''\phi_2 - \phi_2{}''\phi_1] > 0,$$

y concluir que

$$[\phi_1{}'(b)\phi_2(b) - \phi_1{}'(a)\phi_2(a)] - [\phi_1(c)\phi_2{}'(b) - \phi_1(a)\phi_2{}'(a)] > 0.$$

(d) Demostrar que en este caso no puede ser que $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 0$. Indicación: considérese el signo de $\phi_1{}'(a)$ y de $\phi_1{}'(b)$.

(e) Demostrar que las ecuaciones $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 0$ son también imposibles si $\phi_1 > 0$, $\phi_2 < 0$ o $\phi_1 < 0$, $\phi_2 > 0$, o $\phi_1 < 0$, $\phi_2 < 0$ en $(a,b)$. (El lector debería ser capaz de deducirlo casi sin ningún esfuerzo adicional).

El resultado neto de este problema puede resumirse de la manera siguiente: si $a$ y $b$ son ceros consecutivos de $\phi_1$, entonces $\phi_2$ debe tener algún cero en algún punto entre $a$ y $b$. Este resultado, definido de una manera algo más general, se conoce como el "Teorema de Comparación de Sturm". Como ejemplo particular, cualquier solución de la "ecuación diferencial"

$$y'' + (x+1)y = 0$$

debe tener al menos un cero en cualquier intervalo $(n\pi, (n+1)\pi)$.

**33.** (a) Utilizando la fórmula para $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y$ deducida en el Problema 14, demostrar que

$$\operatorname{sen}(k+\tfrac{1}{2})x - \operatorname{sen}(k-\tfrac{1}{2})x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos kx.$$

(b) Concluir que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x}{2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}.$$

Al igual que en el caso de otros dos resultados de esta colección de problemas, esta ecuación es muy importante en el estudio de las "series de Fourier ", y también lo utilizaremos en los Problemas 19-43 y 23-22.

(c) Análogamente, deducir la fórmula

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{n}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}.$$

(En el Problema 27-14 indicaremos una manera más natural de deducir estas fórmulas).

(d) Utilizar los apartados (b) y (c) para hallar $\int_0^b \operatorname{sen} x\,dx$ y $\int_0^b \cos x\,dx$ directamente a partir de la definición de integral.