Ejercicio 2

PL: Método Simplex, PL: Interpretación técnico-económica, PL: Postoptimización, PL: Análisis de sensibilidad

Enunciado

Una empresa produce y comercializa tres tipos de productos, P_1, P_2 y P_3, que sirve en palés, que pueden o no estar completos (se puede entregar un palé a medio completar, medio palé, un cuarto de pálé, etc.) Por cada palé de estos productos, la empresa obtiene unos ingresos netos de 4, 12 y 2 unidades monetarias, respectivamente. Existe una instalación de la que se dispone de un total de 6 días de trabajo a la semana. Producir un palé de P_1 lleva 3 días, uno de P_2 lleva 6 días y montar uno de P_3 lleva 2 días. Además, existe un compromiso de entregar al menos el contenido conjunto (de P_1, P_2 y P_3) equivalente a dos palés.

El siguiente modelo de Programación Lineal permite obtener el plan de producción óptimo:

$$\begin{aligned} \text{max. } z = 4x_1 + 12x_2 + 2x_3 \\ s.a. : \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Donde x_i representa el número de palés producidos y servidos semanalmente de P_i, con $i = 1, 2, 3$. El problema también se puede formular como:

$$\begin{aligned} \text{max. } z = 4x_1 + 12x_2 + 2x_3 \\ s.a. : \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + h_1 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 - h_2 = 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ h_1,\ h_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Una solución posible es aquella a la que le corresponde la siguiente tabla, obtenida con la aplicación del método del Simplex en su variante de la matriz completa:

		x_1	x_2	x_3	h_2	h_1
	-8	0	2	0	-2	-2
x_1	2	1	4	0	2	1
x_3	0	0	-3	1	-3	-1

Se pide:

1) Explicar el significado de las variables h_1 y h_2.
2) Indicar si la solución a la que se refiere la tabla proporcionada es óptima y justificar por qué.
3) Para la solución óptima del problema (sea la correspondiente a la tabla dada u otra obtenida a partir de ella), interpretar y explicar el programa de producción obtenido, la utilización que se hace de la instalación y el cumplimiento del compromiso comercial.

Para la solución óptima, cada uno de los siguientes apartados son independientes entre sí.

4) ¿En qué condiciones está dispuesta la empresa a renegociar su compromiso de entregar un mínimo de 2 palés?
5) Se ha realizado un estudio de mercado y se sabe que no se puede vender más de 1 palé de P_3 a la semana. Obtener el nuevo programa de producción óptimo con esa información.
6) Identificar el rango de valores para el ingreso neto por palé dentro del cual resulta beneficioso producir y vender el producto P_2.

Resolución

Apartado 1

- h_1 representa el número de días, de los 6 disponibles, que no se emplean en la producción de palés. Se refiere a capacidad no utilizada.
- h_2 representa el número de palés que se sirven por encima del compromiso adquirido de los dos palés.

Apartado 2

La solución correspondiente a la tabla dada no es la solución óptima, porque el criterio del Simplex de la variable x_2 es positivo ($V_2^B = 2$). Esto significa que si la variable x_2 fuera básica, el valor de la función objetivo sería 2 u.m. mayor que el valor de la función objetivo actual, que es 8 u.m.

Apartado 3

En primer lugar, hay que obtener la solución óptima del problema. A partir de la tabla dada, aplicando el método del Simplex, entra la variable x_2 y sale la variable x_1.

		x_1	x_2	x_3	h_2	h_1
	-8	0	2	0	-2	-2
x_1	2	1	4	0	2	1
x_3	0	0	-3	1	-3	-1
	-9	$-1/2$	0	0	-3	$-5/2$
x_2	$1/2$	$1/4$	1	0	$1/2$	$1/4$
x_3	$3/2$	$3/4$	0	1	$-3/2$	$-1/4$

La tabla obtenida corresponde a la solución óptima. El plan de producción consiste en:

- no producir nada de producto P_1,
- producir $\frac{1}{2}$ de palé de producto P_2,
- producir $\frac{3}{2}$ de palé de producto P_3,
- utilizar por completo los seis días de capacidad de producción y
- cumplir el compromiso comercial entregando el mínimo de producto pactado (dos palés).

El beneficio semanal que se obtiene gracias a este plan de producción es de 9 unidades monetarias.

Apartado 4

El precio sombra de la restricción correspondiente al compromiso comercial es $\pi_2^B = V_{h_2}^B = -3$. De manera que $\Delta z|_{\Delta b_2=1} = -3$, por lo que:

- la empresa estaría dispuesta a asumir un compromiso de entrega superior a 2 palés siempre que recibiera a cambio algún tipo de compensación superior a 3 u.m. por cada palé adicional que se comprometiera a entregar por encima de la cantidad original.

- la empresa estaría dispuesta a ofrecer algún tipo de compensación por relajar el compromiso de entrega, sin superar 3 u.m. por la relajación del compromiso en un palé.

Apartado 5

La información adicional genera una nueva restricción: $x_3 \leq 1$. La producción de P_3 obtenida anteriormente es de $\frac{3}{2}$ palés, por lo que esa solución ya no es factible y es necesario obtener una nueva solución óptima y factible. Al introducir la nueva restricción (que se puede formular como $x_3 + h_3 = 1$) y aplicar el método de Lemke, se obtiene lo siguiente:

		x_1	x_2	x_3	h_2	h_1	h_3
	-9	$-1/2$	0	0	-3	$-5/2$	0
x_2	$1/2$	$1/4$	1	0	$1/2$	$1/4$	0
x_3	$3/2$	$3/4$	0	1	$-3/2$	$-1/4$	0
	1	0	0	1	0	0	1
	$-26/3$	0	0	0	-4	$-8/3$	$-2/3$
x_2	$1/3$	0	1	0	1	$1/3$	$1/3$
x_3	1	0	0	1	0	0	1
x_1	$2/3$	1	0	0	-2	$-1/3$	$-4/3$

La tabla obtenida corresponde a la nueva solución óptima, cuyo plan de producción consiste en:

- producir $\frac{2}{3}$ de palé de producto P_1,
- producir $\frac{1}{3}$ de palé de producto P_2,
- producir 1 palé de producto P_3,
- utilizar por completo los seis días de capacidad de producción y
- cumplir el compromiso comercial entregando el mínimo de producto pactado (dos palés).

El beneficio semanal que se obtiene gracias a este plan de producción es de $\frac{26}{3}$ unidades monetarias, que es menor que el que se obtenía antes de la restricción comercial.

Apartado 6

Resulta beneficioso producir y vender P_2 mientras $V^B \leq 0$, ya que x_2 será una variable básica de la solución óptima.

$$V^B = c - c^B B^{-1} A =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & c_{x_2} & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{x_2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 3/4 & 0 & 1 & -3/2 & -1/4 \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{10-c_{x_2}}{4} & 0 & 0 & \frac{6-c_{x_2}}{2} & \frac{2-c_{x_2}}{4} \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow 10 \leq c_{x_2} \leq \infty$$

Para cualquier precio de venta superior a 10 u.m. por palé de tipo P_2, la variable x_2 es básica y, por tanto, resulta beneficioso producir y vender este producto.

Ejercicio 3

PL: Método Simplex, PL: Método Lemke, PL: Postoptimización, Dualidad

Enunciado

Dado el problema de Programación Lineal:

$$\begin{aligned} \text{max. } z = -x_1 + x_2 - 5x_3 + 14x_4 \\ \text{s.a.:} \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 24 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 12 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Se conoce la siguiente información sobre la solución óptima: $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $u^B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

1) Para la solución óptima, obtener la tabla correspondiente a la aplicación del método del Simplex en su variante de la matriz completa.

2) Indicar cuál es la nueva solución si el término independiente de la segunda restricción disminuye en 8 unidades.

3) Indicar, a partir del problema original, cómo se modificaría la solución si el coeficiente de x_4 pasara de tomar un valor de 14 a un valor de 5.

4) Explicar el significado de $V^B_{x_3}$, si se interpreta como $c_{x_3} - c^B p^B_3$, y explicar en detalle su significado con los valores numéricos que permiten calcular $V^B_{x_3}$.

5) Formular el problema dual e indicar cuál es su solución óptima a partir de la aplicación de los teoremas de la dualidad. No se admite la resolución del apartado por otros métodos diferentes del solicitado.

Resolución

Apartado 1

Para poder construir la tabla que se pide, faltan las tasas de sustitución, $p^B = B^{-1}A$, y el vector de criterios del Simplex, $V^B = c - c^B B^{-1} A$.

$$p^B = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 5/6 & 1 & 1/6 & 0 \\ -2 & -1/3 & -11/3 & 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V^B = c - c^B B^{-1} A = c - c^B p^B =$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 & 14 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 5/6 & 1 & 1/6 & 0 \\ -2 & -1/3 & -11/3 & 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -8 & -25/3 & -50/3 & 0 & -7/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la tabla que se pide es:

		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2
	-56	-8	$-25/3$	$-50/3$	0	$-7/3$	0
x_4	4	$1/2$	$2/3$	$5/6$	1	$1/6$	0
h_2	4	-2	$-1/3$	$-11/3$	0	$-1/3$	1

Apartado 2

En el nuevo problema el término independiente de la regunda restricción cambia, $b_2 = 4$, por lo que $u^B = B^{-1}b$ también cambia.

$$u^B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La solución deja de ser factible, $u^B \leq 0$, pero cumple el criterio de optimalidad, $V^B \leq 0$. Por lo tanto, se puede aplicar el método de Lemke. Al entrar h_2 en la base y salir x_1 de la misma, se obtiene:

		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2
	-40	0	-7	-2	0	-1	-4
x_4	3	0	*	*	1	*	*
x_1	2	1	*	*	0	*	*

La nueva solución cumple el criterio de optimalidad, $V^B \leq 0$, y factible, $u^B \geq 0$, y es $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 3$. El valor de la función objetivo es $z^* = 40$.

Apartado 3

El nuevo problema tendría $c_4 = 5$ y, como x_4 es una variable básica, el vector de criterios del Simplex, V^B, cambiaría de valor:

$$V^B = c - c^B cB^{-1}A = c - c^B - cp^B =$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 5/6 & 1 & 1/6 & 0 \\ -2 & -1/3 & -11/3 & 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -7/2 & -7/3 & -55/6 & 0 & -5/6 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución sería igualmente factible y óptima. Dado que no cambian ni la base B, ni el vector de disponibilidad de recursos, b, no cambia el nivel de realización de las variables básicas (u^B).

Apartado 4

El valor de $V^B_{x_3} = c_{x_3} - c^B p^B_3 = \frac{-50}{3}$ representa la diferencia entre:

- la contribución unitaria al beneficio por cada unidad realizada de x_3, $c_{x_3} = -5$, y
- la modificación de la función objetivo debida a la modificación de las variables básicas que implica la realización de una unidad de x_3, $\frac{35}{3}$, que se calcula como:
  - la contribución unitaria de las variables básicas, c^B, multiplicada por
  - la modificación de las variables básicas que representa la realización de una unidad de x_3, p^B_3.

En este caso, al incremenetar una unidad de la variable x_3, la función objetivo disminuiría en 5 unidades y la modificación de las variables básicas haría que la función objetivo disminuyera en $\frac{35}{3}$ unidades más, con lo que no resulta beneficiosa la realización de esa actividad.

Apartado 5

El problema dual es:

$$
\begin{aligned}
\text{min. } s = 24y_1 + 12y_2 \\
\text{s.a.:} \\
3y_1 - y_2 \geq -1 \\
4y_1 + y_2 \geq 1 \\
5y_1 - 2y_2 \geq -5 \\
6y_1 + 2y_2 \geq 14 \\
y_1,\, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Por una parte, por aplicación del Teorema Fundamental de la Dualidad, su solución óptima es: $y^o = \pi^B = (\frac{7}{3}, 0)$. El valor de la función objetivo es $s^* = 24 \times \frac{7}{3} = 56$, que es igual que el de la función objetivo del primal.

Por otra parte, por aplicación del teorema de las holguras complementarias, se obtienen los valores de las variables de holgura del problema dual:

- $y_1^h = -V_{x_1}^B = 8$
- $y_2^h = -V_{x_2}^B = 25/3$
- $y_3^h = -V_{x_3}^B = 49/3$
- $y_4^h = -V_{x_4}^B = 0$

Ejercicio 4

PL: Método de las dos fases, PL: Análisis de sensibilidad

Enunciado

Se pide responder a las siguientes preguntas de tipo test. Solo una respuesta de cada apartado es correcta.

Apartado 1

Al resolver un problema mediante el método de las dos fases, una restricción del tipo $\sum_j a_{x_i x_j} x_j = b_i$, en el problema auxiliar asociado, se transforma en:

- $\sum_j a_{x_i x_j} x_j + h_i - a_{x_i} = b_i$.
- $\sum_j a_{x_i x_j} x_j - h_i + a_{x_i} = b_i$.
- $\sum_j a_{x_i x_j} x_j + a_{x_i} = b_i$.
- Ninguna de las anteriores es correcta.

Apartado 2

Al resolver un problema mediante el método de las dos fases:

- Si la solución óptima del problema auxiliar contiene alguna variable artificial en la base, el problema original no tiene solución factible.
- Si la solución óptima del problema auxiliar tiene función objetivo igual a cero, el problema original sí tiene solución factible.
- Tras obtener la solución óptima del problema auxiliar, basta con recalcular V^B y z para poder reutilizar la tabla de dicha solución y obtener una tabla correspondiente una solución factible del problema original.
- Ninguna de las anteriores es correcta.

Apartado 3

Dado un problema de Programación Lineal de maximización, P, cuya solución óptima es x^*:

- Al introducir una nueva restricción, la solución x^* puede dejar de cumplir el criterio de optimalidad.
- Al introducir una nueva actividad, la solución x^* puede dejar de ser factible.
- Si se disminuye la contribución unitaria al beneficio de una actividad no básica, la x^* podría dejar de ser la solución óptima.
- Ninguna de las anteriores es correcta.

Resolución

Apartado 1

$\sum_j a_{x_i x_j} x_j + a_{x_i} = b_i$.

Apartado 2

Si la solución óptima del problema auxiliar tiene función objetivo igual a cero, el problema original sí tiene solución factible.

Apartado 3

Ninguna de las anteriores es correcta.

Ejercicio 5

PL: Método Simplex, PL: Análisis de sensibilidad, PL: Postoptimización

Enunciado

El siguiente programa de Programación Lineal se utiliza para realizar la planificación mensual de una planta que produce 3 productos (P_1, P_2 y P_3) que se procesan en tres talleres (T_1, T_2 y T_3) cuyas respectivas disponibilidades horarias son de 900, 480 y 400 horas al mes.

$$\begin{aligned} \text{max. z} = 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 \\ s.a.: \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 900 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 480 \\ x_1 + 2x_3 \leq 400 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

La siguiente tabla corresponde a la solución óptima del problema anterior:

		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3
	-3300	0	0	-1	-1	-5	0
x_1	210	1	0	1/2	1/2	$-1/2$	0
x_2	270	0	1	1/2	$-1/2$	3/2	0
h_3	190	0	0	3/2	$-1/2$	1/2	1

Donde h_1, h_2 y h_3 son las variables de holgura asociadas a cada una de las restricciones.

Se pide responder de forma independiente y a partir de la solución óptima a las siguientes cuestiones:

1) Interpretar la solución correspondiente a la tabla proporcionada.

2) Realizar el análisis de sensibilidad para c_{x_1} y c_{x_3}, y explicar los resultados obtenidos.

3) Calcular la nueva solución óptima del problema si, debido a una enfermedad, las horas disponibles en el taller T_2 se reducen a 300 horas semanales.

4) Se está valorando la posibilidad de ampliar la capacidad en cada uno de los talleres. Existe un taller vecino que ofrece horas adicionales de cada uno de los talleres a un precio de 3 unidades monetarias cada hora. ¿En qué talleres y cuántas horas sería interesante subcontratar al taller vecino al precio anterior?

5) Se está valorando la posibilidad de ampliar la gama de productos e introducir un nuevo producto, P_4, que consumiría una hora de cada uno de los talleres. ¿Qué debe cumplir la contribución unitaria al benefecio de este nuevo producto para que resulte beneficioso producirlo y venderlo?

Resolución

Apartado 1

El plan de producción óptimo consiste en:

- producir 210 unidades de P_1,
- producir 270 unidades de P_2,
- no producir P_3,
- emplear todas las horas de los talleres T_1 y T_2, y
- emplear 210 horas del taller T_3 (de manera que restan sin emplear 190).

Apartado 2

Análisis de sensibilidad para c_{x_1}:

Al ser x_1 una variable básica, si se modifica c_{x_1} se modifica también todo el vector de criterios del Simplex:

$$V^B = c - c^B B^{-1} A =$$

$$\begin{pmatrix} c_{x_1} & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{x_1} & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{x_1} & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{x_1} & 6 & \frac{c_{x_1}+6}{2} & \frac{c_{x_1}-6}{2} & \frac{-c_{x_1}+18}{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{6-c_{x_1}}{2} & \frac{6-c_{x_1}}{2} & \frac{c_{x_1}-18}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que la solución seguirá siendo óptima si $V^B \leq 0$:

$$\begin{array}{r} 6 - c_{x_1} \leq 0 \\ 6 - c_{x_1} \leq 0 \\ c_{x_1} - 18 \leq 0 \end{array} \quad \Rightarrow 6 \leq c_{x_1} \leq 18$$

Si la contribución unitaria al beneficio del prodcuto P_1 está entre 6 y 18 (como es el caso inicial, en el que es 8), la gama de productos del plan de producción óptimo no se modifica.

En efecto, si la contribución unitaria fuera menor que 6, no resultaría rentable la producción del producto P_1. Si su contribución fuera superior a 18, sería lo suficientemente alta como para aumentar todo lo posible el nivel de realización de P_1, aunque eso implicara dejar de producir algún producto que inicialmente estuviera incluido en el plan de producción óptimo.

Análisis de sensibilidad para c_{x_3}: Como x_3 es una variable no básica, si se modifica c_{x_3} se modifica solo su componente en el vector de criterios del Simplex.

$$c_{x_3} - c^B B^{-1} A_{x_3} = c_{x_3} - c^B p_3^B = c_{x_3} - \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = c_{x_3} - 7$$

Mientras $c_{x_3} - 7 \leq 0$, el criterio del Simplex de la variable x_3 será negativo, por lo que la variable x_3 será no básica y no resultará rentable producir P_3. Si la contribución unitaria al beneficio fuera igual o superior a 7, el criterio del Simplex sería positivo y sí resultaría rentable producir este producto.

Apartado 3

Si $b_3 = 300$, cambia $u^B = B^{-1}b$:

$$u^B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

La nueva solución es degenerada. La función objetivo decrece ($z^B = 2400$).

Apartado 4

Atendiendo al vector de precios sombra $\pi^B = (1, 5, 0)$, se concluye que sólo interesa subcontratar horas en el taller 2, porque lo que se podría ganar con este recurso es superior al coste de su subcontratación.

Al hacer el análisis de sensibilidad de b_2 se observa que la base que se ha obtenido inicialmente sigue conduciendo a la solución óptima si $300 \leq b_2 \leq 900$.

Se podría subcontratar hasta 420 horas (para llegar a las 900). Con esas 420 horas la función objetivo (beneficio) aumentaría en $420 \times 5 = 2100$ y pagaríamos $420 \times 3 = 1260$ por esas horas adicionales con un beneficio neto de $2100 - 1260 = 840$.

En particular si $b_2 = 900$, el nivel de realización de las variables básicas sería $u^B = (0, 900, 400)^T$, con $b_2 = 900$ tendríamos una solución degenerada y podríamos aplicar el método de Lemke obteniendo la solución

		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3
	-5400	-10	0	-6	-6	0	0
h_2	0	-2	0	-1	-1	1	0
x_2	900	-6	1	2	1	0	0
h_3	900	1	0	2	0	0	1

Para $b_2 > 900$ el precio sombra de la restricción 2 sería 0. Por lo tanto no resultaría interesante subcontratar ninguna hora más a ese precio.

Apartado 5

Hay que calcular el interés del nuevo producto en función de su coste. Para eso se estudia la relación entre V^B y c_{x_4}:

$$V^B_{x4} = c_{x_4} - c^B p_4 = c_{x_4} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_{x_4} - 6$$

El criterio del Simplex de la variable x_4 será positivo si su contribución unitaria al beneficio es mayor de 6 y, por tanto, a partir de ese valor resultará beneficioso producir el producto P_4.

Ejercicio 6

PL: Teorema fundamental, PLE: Planos de corte, PL: Método Lemke

Enunciado

Responde a estas preguntas:

- Explicar las implicaciones que tiene el Teorema Fundamental de la Programación Lineal que tienen directa aplicación en método del Simplex.
- Explicar por qué crece indefinidamente la tabla de la matriz completa al ir introduciendo cortes según en algoritmo de Gomory (formas enteras).
- Explicar el método de Lemke basándote en la teoría de la dualidad.

Resolución

Apartado 1

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal asegura que, si existe una solución factible, entonces tiene que existir una solución linealmente independiente factible. En caso de que la solución óptima sea única, esta solución es linealmente independiente; si existen múltiples soluciones óptimas, entonces existe, al menos, una solución linealmente independiente óptima.

En términos geométricos, se deduce del teorema que, si existe una solución linealmente independiente factible, al menos una solución óptima se encuentra entre los vértices del poliedro de la región factible, que son las soluciones entre las que pivota el método del Simplex.

Apartado 2

Al añadir un corte, se añade tanto una fila como una columna a la matriz completa. Mientras la variable de holgura asociada a este corte sea nula ($h_k = 0$), tiene sentido mantener este corte activo y, por tanto, permitir que la matriz crezca. Sin embargo, cuando la variable de holgura entra en la base, el corte ya no es útil porque la solución óptima de esta última relajación lineal no está en el plano de corte de $h_k = 0$. De esta forma, pueden eliminarse tanto la fila como la columna asociadas a esta variable.

Apartado 3

Se empieza por construir una solución básica primal que sea básica factible dual, esto es, óptima del primal.

A continuación, si se tiene una solución que sea factible primal, entonces esta es óptima. Si no es factible primal, entonces hay que construir una solución básica primal que sea factible dual y adyacente a la solución anterior.

Esto se repite iterativamente hasta encontrar una solución básica factible primal. En cada iteración, se determina qué variable sale de la base actual y cuál entra, y se realiza la operación de cambio de base.