3. DETERMINANTEN EN MATRICES

In dit hoofdstuk beschouwen we schema's van reële getallen waarbij de daarin voorkomende getallen getabuleerd zijn in een aantal rijen en kolommen.

Een *determinant* is een getal dat op een welbepaalde manier uit zo'n vierkant getallenschema te destilleren is. De term *matrix* gebruikt men voor het getallenschema zelf.

Determinanten spelen een belangrijke rol bij het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen en bij het inverteren van vierkante matrices. Maar ook in de differentiaalrekening komen determinanten aan bod, zoals we zullen zien in hoofdstuk 6.

We starten dit hoofdstuk met een bespreking van het begrip *determinant*. Vervolgens laten we de matrices en hun toepassingen aan bod komen.

Doorheen het hele hoofdstuk zal met de uitdrukking a_{ij} (of b_{ij}, c_{ij}, …) naar het getal op de i-de rij en de j-de kolom van het getallenschema verwezen worden.

3.1. DETERMINANT VAN ORDE TWEE

DEFINITIE

Een *determinant van orde twee* is het getal dat uit het getallenschema

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

te berekenen is met de formule

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

In symbolen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

VOORBEELDEN

- $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 28 - 6 = 22$
- $\begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-9) \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = -18 + 12 = -6$

3.2. DETERMINANT VAN ORDE DRIE

DEFINITIE

Een *determinant van orde 3* is het getal dat uit het getallenschema

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

te berekenen is met de formule

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

waarbij

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \left(\begin{matrix} \text{determinant van orde 2 na het weglaten} \\ \text{van rij } i \text{ en kolom } j \text{ in het getallenschema} \end{matrix} \right)$$

Het getal A_{ij} noemt men de *cofactor* van het getal a_{ij}.

In symbolen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

VOORBEELD

Bereken $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

OPLOSSING

We bepalen eerst de cofactoren van de elementen van de eerste rij:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -((-3) \cdot 3 - 0 \cdot 5) = 9$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-2) - 1 \cdot 5 = 1$$

Met behulp van de definitie vinden we dan

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 1 = 40$$

In de bovenstaande definitie worden de elementen van de eerste rij met hun corresponderende cofactor vermenigvuldigd en de resultaten daarna opgeteld. Deze procedure heet *ontwikkelen naar de eerste rij*. Men kan ook ontwikkelen naar een andere rij of zelfs een andere kolom. De volgende eigenschap drukt uit dat men dan steeds hetzelfde resultaat zal vinden.

EIGENSCHAP

Voor elke $i, j \in \{1, 2, 3\}$ geldt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \\ &\quad \text{(ontwikkeling naar de } i\text{-de rij)} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \\ &\quad \text{(ontwikkeling naar de } j\text{-de kolom)} \end{aligned}$$

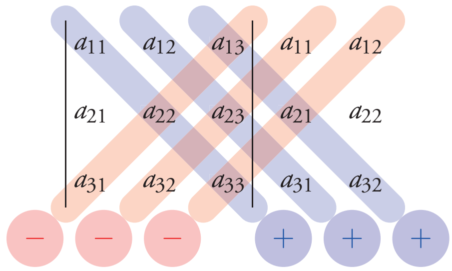
We geven geen algemeen bewijs van deze eigenschap. Je kan ze eenvoudig zelf narekenen met verschillende getallenvoorbeelden.

3.2.1. Regel van Sarrus

Indien men de ontwikkeling naar een rij of kolom van een determinant volledig uitwerkt, bekomt men de volgende formule:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Deze formule wordt de *regel van Sarrus* genoemd en kan gemakkelijk onthouden worden aan de hand van volgend schema:



De producten van de elementen op elke blauwe lijn worden opgeteld en hiervan worden de producten van de elementen op elke rode lijn afgetrokken.

VOORBEELD

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & 6 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) \cdot (-2) \\ & -5 \cdot 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 0 \cdot 6 - 3 \cdot (-3) \cdot 2 \end{aligned}$$
$$= 18 + 24 - 20 + 18 = 40$$

3.3. DETERMINANT VAN ORDE VIER EN HOGER

De definitie van de determinant van orde 3 is onmiddellijk te veralgemenen tot orde $n \geqslant 4$.

DEFINITIE

Een determinant van orde n met $n \geqslant 4$ is het getal dat men uit het getallenschema

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

kan berekenen aan de hand van de formule

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

waarbij

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \left(\begin{array}{c} \text{determinant van orde } n-1 \text{ na weglaten} \\ \text{van rij } i \text{ en kolom } j \text{ in het getallenschema} \end{array} \right)$$

Het getal A_{ij} noemt men hier ook de *cofactor* van het getal a_{ij}.

In symbolen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

De uitdrukking $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$ noemt men de *ontwikkeling naar de eerste rij* van de bijbehorende determinant.

Opmerkingen

- Net zoals een determinant van orde 3 kan men een determinant van orde $n \geqslant 4$ ontwikkelen naar gelijk welke rij of kolom zonder dat dit invloed heeft op het eindresultaat. Om het rekenwerk te vereenvoudigen is het handig een rij of kolom te kiezen met zoveel mogelijk nulwaarden.
- De definitie hierboven is ook van toepassing op determinanten van orde 2. Inderdaad,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- De regel van Sarrus voor $n = 3$ is niet veralgemeenbaar tot $n \geqslant 4$.

3.4. NUTTIGE EIGENSCHAPPEN VAN DETERMINANTEN

Het berekenen van een determinant via ontwikkeling naar een rij of kolom leidt snel tot uitgebreid cijferwerk. Er bestaan echter enkele eigenschappen die het rekenwerk soms aanzienlijk versnellen. Hierin zal de term *hoofddiagonaal* vaak terugkeren. Men zegt dat een element a_{ij} in het onderliggend vierkant getallenschema op de *hoofddiagonaal* ligt indien $i = j$. De hoofddiagonaal is de diagonaal van linksboven naar rechtsonder.

3.4.1. Driehoekseigenschap

Een determinant waarvan alle getallen onder (boven) de hoofddiagonaal gelijk zijn aan nul, is gelijk aan het product van de elementen op deze hoofddiagonaal.

In symbolen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.4.2. Spiegelen over de hoofddiagonaal

Wanneer men in een determinant de elementen spiegelt over de hoofddiagonaal, dat wil zeggen dat men de elementen a_{ij} en a_{ji} van plaats verwisselt voor alle $i > j$, zal de nieuwe determinant gelijk zijn aan de oorspronkelijke determinant.

Ga dit zelf na, steunend op de definitie, voor determinanten van de 2de en 3de orde:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Opmerking

Elke eigenschap die betrekking heeft op de rijen van een determinant zal bijgevolg ook voor de kolommen gelden, en omgekeerd.

3.4.3. Verwisselen van rijen of kolommen

Verwisselt men twee rijen (kolommen) van een determinant, dan is de nieuwe determinant tegengesteld aan de oorspronkelijke determinant.

Verifieer deze eigenschap in de volgende voorbeelden:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

en

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

alsook in de volgende getallenvoorbeelden:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

en

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

GEVOLG

Een determinant met twee identieke rijen (kolommen) is gelijk aan nul.

Bewijs

Verwisselt men deze identieke rijen (kolommen), dan blijft de determinant uiteraard ongewijzigd, terwijl deze volgens de eigenschap verandert van teken. Dit is alleen maar mogelijk als de determinant gelijk is aan nul. □

3.4.4. Schalen van rijen of kolommen

Vermenigvuldigt men alle elementen van een rij (kolom) van een determinant met eenzelfde getal λ, terwijl de overige elementen ongewijzigd blijven, dan is de nieuwe determinant het λ-voud van de oorspronkelijke determinant.

Verklaring

De cofactoren van de elementen op de geschaalde rij (kolom) zijn identiek aan de cofactoren van de overeenkomstige elementen in de oorspronkelijke determinant. Als men de nieuwe determinant ontwikkelt naar de geschaalde rij (kolom), kan de schaalfactor λ buiten de haakjes geplaatst worden. □

Deze eigenschap houdt in dat men een gemeenschappelijke factor in een rij (kolom) 'buiten kan plaatsen'. Bijvoorbeeld,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

en

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

GEVOLG 1

Is een rij (kolom) van een determinant (elementsgewijs) een λ-voud van een andere rij (kolom), dan is deze determinant gelijk aan nul.

Verklaring

Men kan de gemeenschappelijke factor λ in de veelvoudrij (-kolom) buiten plaatsen, waarna een determinant met twee identieke rijen (kolommen) ontstaat. Deze determinant is dan gelijk aan nul. □

GEVOLG 2

Als alle elementen van een determinant van orde n vermenigvuldigd worden met eenzelfde factor λ, dan wordt de determinant vermenigvuldigd met λ^n.

Verklaring

Telkens men een rij (kolom) vermenigvuldigt met λ, wordt hierdoor de gehele determinant met λ vermenigvuldigd. Er zijn n rijen (kolommen), dus uiteindelijk is de determinant dan vermenigvuldigd met λ^n. $\square$

3.4.5. Someigenschap

Als de elementen in een rij (kolom) gelijk zijn aan de som van twee termen, dan is de determinant een som van twee determinanten die ontstaan door deze rij (kolom) 'op te splitsen'.

Zo gelden bijvoorbeeld

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

en

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Men kan deze eigenschap eenvoudig verifiëren door de determinant te ontwikkelen naar de rij (kolom) waarvan de elementen de som van twee termen zijn.

3.4.6. Invariantie-eigenschap

Wanneer men bij een rij (kolom) een veelvoud van een andere rij (kolom) optelt, dan is de nieuwe determinant gelijk aan de oorspronkelijke determinant.

Neem bijvoorbeeld een determinant van orde 4. Als we bij kolom 3 hierin λ keer kolom 1 optellen (notatie: $K_3 \rightarrow K_3 + \lambda K_1$), dan

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + \lambda a_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + \lambda a_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + \lambda a_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 + \lambda a_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Inderdaad,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + \lambda a_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + \lambda a_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + \lambda a_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 + \lambda a_4 & d_4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda a_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda a_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda a_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & \lambda a_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad \text{(someig.)} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & a_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad \text{(schaaleig.)} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

De laatste overgang steunt op de eigenschap dat een determinant met twee identieke kolommen (hier kolom 1 en kolom 3) gelijk is aan nul.

GEVOLG

Een determinant is gelijk aan nul als een rij (kolom) gelijk is aan een elementsgewijze som van veelvouden van andere rijen (kolommen). Het omgekeerde is eveneens waar.

Verklaring

Veronderstel bijvoorbeeld rij 3 is een som van veelvouden van de andere rijen. Als men deze veelvouden achtereenvolgens aftrekt van de derde rij, verandert de determinant niet (invariantie-eigenschap) en bekomt men enkel nulwaarden in rij 3. Een ontwikkeling van de determinant naar een nulrij geeft automatisch de waarde nul als resultaat. Het bewijs van de omgekeerde bewering valt buiten het kader van dit boek. □

3.4.7. Enkele voorbeelden

In de volgende voorbeelden laten we zien hoe de nuttige eigenschappen toegepast kunnen worden bij het efficiënt uitrekenen van een determinant.

Een algemene strategie is eerst een element met waarde 1 op te sporen (de 'spil'). Door het optellen van passende veelvouden van de spilrij (-kolom) bij de overige rijen (kolommen), kunnen we de spilkolom (-rij) 'schoonvegen', dat wil zeggen dat alle elementen daarvan, uitgezonderd de spil zelf, nul worden. De nieuwe determinant, die door de invariantie-eigenschap nog atijd gelijk is aan de oorspronkelijke, is dan eenvoudig te ontwikkelen naar de schoongeveegde spilrij of spilkolom. In onderstaande voorbeelden is de spil telkens omcirkeld.

VOORBEELDEN

- $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{vmatrix} \overset{(a)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & -11 \\ 4 & -6 & 3 \end{vmatrix} \overset{(b)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & -11 \\ 0 & -22 & -21 \end{vmatrix}$$

  $$= \begin{vmatrix} -11 & -11 \\ -22 & -21 \end{vmatrix} = (-11)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -22 & -21 \end{vmatrix} = (-11)(-21+22) = -11$$

  waarbij (a) : $R_2 \to R_2 - 2R_1$ en (b) : $R_3 \to R_3 - 4R_1$

- $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \overset{(a),(b)}{=} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = -(-4+36) = -32$$

  waarbij (a) : $K_2 \to K_2 - 2K_1$ en (b) : $K_3 \to K_3 - 3K_1$

- $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{(a)}{=} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{(b),(c)}{=} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & -3 \\ 8 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

  $$= -\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -(7+24) = -31$$

  waarbij (a) : $R_1 \to R_1 - R_3$, (b) : $R_2 \to R_2 + 6R_1$ en (c) : $R_3 \to R_3 - 2R_1$

- $$\begin{vmatrix} 1 & u & v+w \\ 1 & v & u+w \\ 1 & w & u+v \end{vmatrix} \overset{(a),(b)}{=} \begin{vmatrix} 1 & u & v+w \\ 0 & v-u & u-v \\ 0 & w-u & u-w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v-u & u-v \\ w-u & u-w \end{vmatrix}$$
  $$= (u-v)(u-w)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (u-v)(u-w)\cdot 0 = 0$$
  met (a) : $R_2 \to R_2 - R_1$ en (b) : $R_3 \to R_3 - R_1$

- Determinant van Vandermonde:
  $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \overset{(a),(b)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$
  $$= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$$
  $$= (b-a)(c-a)(c+a-(b+a)) = (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$
  waarbij (a) : $R_2 \to R_2 - R_1$ en (b) : $R_3 \to R_3 - R_1$

Opmerkingen

- Bovenstaande 'veegmethode' levert niet altijd het snelst resultaat op. Zo is het vierde voorbeeld nog sneller op te lossen als volgt:
  $$\begin{vmatrix} 1 & u & v+w \\ 1 & v & u+w \\ 1 & w & u+v \end{vmatrix} \overset{(a)}{=} \begin{vmatrix} 1 & u & u+v+w \\ 1 & v & u+v+w \\ 1 & w & u+v+w \end{vmatrix} = 0$$
  met (a) : $K_3 \to K_3 + K_2$. De laatste determinant is nul omdat ze twee gelijke kolommen heeft.

- Elementen met een waarde verschillend van 1 kunnen ook als spil gebruikt worden. Vaak zal dit tot meer cijferwerk leiden.

3.5. MATRICES: BASISBEGRIPPEN

3.5.1. $(m \times n)$-matrices

DEFINITIE

Veronderstel $m, n \in \mathbb{N}_0$. Een *$(m \times n)$-matrix A* (of *matrix van formaat $m \times n$*) is een getallenschema van $m \cdot n$ reële getallen, geschikt in m rijen en n kolommen. Het getal op de i-de rij en de j-de kolom heet een *element* en noteert men als a_{ij}. De matrix A noteren we voluit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix}$$

of bondiger

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$$

of zelfs

$$A = \left[a_{ij}\right]$$

wanneer uit de context duidelijk is wat het beschouwde aantal rijen en kolommen zijn.

Voor de verzameling van alle $(m \times n)$-matrices van reële getallen hanteren we de notatie $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

3.5.2. Gelijkheid van twee matrices

Twee matrices $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ en $B = \left[b_{ij}\right]_{m' \times n'}$ heten *gelijk* als en slechts als ze hetzelfde formaat hebben en hun elementen twee aan twee gelijk zijn:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m = m' \quad \text{en} \quad n = n' \\ a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m\,;\ j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

VOORBEELD

Voor welke waarde(n) van $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ zijn de matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 2x \\ x-1 & y \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} x & y+1 \\ 2z & t+z \end{bmatrix}$ gelijk?

OPLOSSING

Er geldt

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3 = x \\ 2x = y + 1 \\ x - 1 = 2z \\ y = t + z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

Als $A = B$, dan zijn beide matrices gelijk aan $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

3.5.3. Rijvectoren en kolomvectoren

Een matrix met slechts één rij heet een *rijvector*. Een matrix met slechts één kolom heet een *kolomvector*.

VOORBEELDEN

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -\frac{2}{7} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 4}(\mathbb{R})$ is een rijvector
- $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ is een kolomvector

3.5.4. Vierkante matrices

Een matrix met eenzelfde aantal rijen als kolommen heet een *vierkante matrix*. Het aantal rijen (en dus ook kolommen) van een vierkante matrix noemt men de *orde* van deze matrix. De verzameling vierkante matrices van orde n noteren we als $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Determinant van een vierkante matrix

Elke vierkante matrix A heeft een bijbehorende determinant, $\det(A)$ genoteerd:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix} \quad \text{waarbij} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

Singuliere en reguliere matrices

Een vierkante matrix A heet *regulier* als $\det(A) \neq 0$. Als $\det(A) = 0$, dan heet de vierkante matrix A *singulier*.

Diagonalen van een vierkante matrix

In een vierkante matrix $\left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ heet de lijst matrixelementen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ de *hoofddiagonaal* en de lijst $a_{n1}, a_{n-1\,2}, \dots, a_{1n}$ de *nevendiagonaal*. De hoofddiagonaal is dus bepaald door de elementen van linksboven tot rechtsonder en de nevendiagonaal door de elementen van linksonder en tot rechtsboven.

Spoor van een vierkante matrix

Het *spoor* van een vierkante matrix $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ is de som van de elementen op de hoofddiagonaal van A:

$$\mathrm{sp}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

VOORBEELDEN

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 7 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

  A is singulier ($\det(A) = 0$) en $\mathrm{sp}(A) = 1 + 5 + (-1) = 5$

- $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

  B is regulier ($\det(B) = -11$) en $\mathrm{sp}(B) = 1 + 4 = 5$

3.5.5. Nulmatrices

Een *nulmatrix* is een (niet noodzakelijk vierkante) matrix waarvan alle elementen gelijk zijn aan nul. De nulmatrix met formaat $m \times n$ noteren we als $0_{m\times n}$. Als uit de context duidelijk blijkt wat het formaat is, noteren we de nulmatrix gewoon als $[0]$.

3.5.6. Eenheidsmatrices

Een *eenheidsmatrix* is een vierkante matrix waarvan alle elementen op de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 1, terwijl alle overige elementen gelijk zijn aan 0. De eenheidsmatrix van orde n noteren we als E_n.

VOORBEELDEN

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opmerkingen

- $E_n = \left[\delta_{ij}\right]$ waarbij $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j \end{cases}$
  Hierbij noemt men δ het *symbool van Kronecker*.
- $\det(E_n) = 1$ en $\operatorname{sp}(E_n) = n$

3.5.7. Diagonaalmatrices en scalaire matrices

Een *diagonaalmatrix* is een vierkante matrix met alle elementen buiten de hoofddiagonaal gelijk aan nul:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Merk op: $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Een *scalaire matrix* is een diagonaalmatrix met gelijke elementen op de hoofddiagonaal:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix}.$$

Merk op: $\det(A) = a^n$ en $\mathrm{sp}(A) = na$.

3.5.8. De getransponeerde van een matrix

De *getransponeerde* van een $(m \times n)$-matrix A is de $(n \times m)$-matrix die men uit A bekomt door alle rijen als kolommen te noteren, met behoud van de volgorde. De getransponeerde van A noteren we als A^T.

VOORBEELDEN

- $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$
- $C = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} = C$

Opmerking

$\left(A^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = A$ voor elke $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

3.6. REKENEN MET MATRICES

3.6.1. Som van matrices

De som $A + B$ van twee matrices $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ en $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ is gedefinieerd als de matrix $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ waarbij

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Per definitie berekent men de sommatrix $A + B$ door de overeenkomstige elementen uit A en B twee aan twee op te tellen.

Opmerking

Deze definitie heeft enkel betekenis als de matrices A en B hetzelfde formaat hebben. In alle andere gevallen is de sommatrix $A + B$ niet gedefinieerd.

VOORBEELD

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 & 0+2 \\ 4+1 & -3+0 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

De volgende eigenschappen zijn gemakkelijk te verifiëren:

EIGENSCHAPPEN VAN DE MATRIXSOM

Voor alle $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ gelden:

- $A + (B + C) = (A + B) + C$

  Men zegt dat de optelling *associatief* is in $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- $A + [0] = A$ en $[0] + A = A$

  Men zegt dat de nulmatrix *neutraal* is voor de optelling in $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- $A + B = B + A$

  Men zegt dat de optelling *commutatief* is in $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- $(A + B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$

3.6.2. Product van een matrix met een reëel getal

Gegeven $r \in \mathbb{R}$ en $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$. Men definieert de matrix rA als de matrix $\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ waarbij

$$b_{ij} = r\,a_{ij}$$

M.a.w. de matrix rA bekomt men door alle elementen van de matrix A te vermenigvuldigen met het getal r.

VOORBEELDEN

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -2 \\ -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1/3 & 2/5 \\ 2/3 & 3/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$$

De volgende eigenschappen kunnen gemakkelijk geverifieerd worden:

EIGENSCHAPPEN VAN DE SCALAIRE VERMENIGVULDIGING

Voor alle $r, s \in \mathbb{R}$ en $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ gelden:

- $(rs)A = r(sA)$ (*gemengde associativiteitswet*)
- $(r+s)A = rA + sA$ (*distributiviteitswet*)
- $r(A+B) = rA + rB$ (*distributiviteitswet*)
- $(rA)^{\mathsf{T}} = rA^{\mathsf{T}}$

3.6.3. Product van matrices

Het product AB van twee matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ en $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ is gedefinieerd als de matrix $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ waarbij

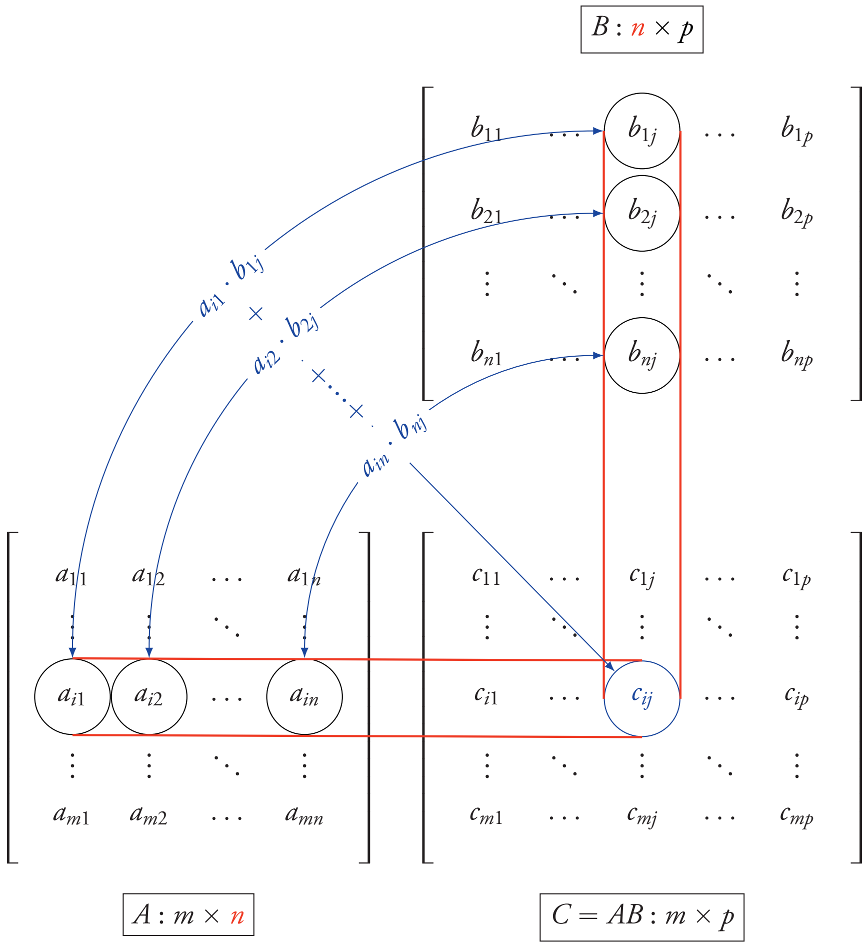
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Per definitie berekent men dus het element c_{ij} van de productmatrix AB door

1. rij i uit matrix A en kolom j uit matrix B te kiezen;
2. twee aan twee de overeenkomstige elementen uit deze gekozen rij en kolom te vermenigvuldigen;
3. de verkregen producten op te tellen.

Deze procedure heeft enkel zin als het aantal kolommen van A *gelijk is aan* het aantal rijen van B. In alle andere gevallen is de productmatrix AB niet gedefinieerd.

Schematisch:



VOORBEELD

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 30 & 8 & -4 \\ -15 & -6 & 33 \end{bmatrix}$$

EIGENSCHAPPEN VAN HET MATRIXPRODUCT

Voor zover de onderstaande bewerkingen zinvol zijn, gelden voor alle matrices A, B en C:

- $(AB)C = A(BC)$ (*associativiteitswet*)
- $(rA)B = A(rB) = r(AB)$ $(r \in \mathbb{R})$ (*gemengde associativiteitswet*)
- $(A + B)C = AC + BC$ (*distributiviteitswet*)
- $A(B + C) = AB + AC$ (*distributiviteitswet*)
- $A\,[0] = [0]$ en $[0]\,A = [0]$ (De nulmatrix is *opslorpend voor het matrixproduct.*)
- $A\,E_n = A$ en $E_m\,A = A$ (De eenheidsmatrix is *neutraal voor het matrixproduct.*)
- $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$
- $\det(AB) = \det(A)\,\det(B)$, indien A en B vierkante matrices zijn.

Opmerkingen

- In het algemeen geldt $AB \neq BA$. Het matrixproduct is niet commutatief.
- $AB = [0] \quad \not\Rightarrow \quad A = [0]$ of $B = [0]$
- $AB = AC$ en $A \neq [0] \quad \not\Rightarrow \quad B = C$

3.7. DE INVERSE MATRIX

Veronderstel A is een vierkante matrix van orde n. In heel wat vraagstukken en toepassingen is het nodig om een matrix B te vinden zodat het product van A met B gelijk is aan de eenheidsmatrix E_n. Zo'n matrix B heet een *inverse* van A en is gerelateerd met wat men de *adjunctmatrix* van A noemt.

3.7.1. De adjunctmatrix

DEFINITIE

Zij A een vierkante matrix van orde n. De *adjunctmatrix*, genoteerd $\operatorname{adj}(A)$, van A is de getransponeerde van de vierkante matrix van orde n bestaande uit de cofactoren van de matrix A.

VOORBEELD

Gegeven: $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

De cofactoren van A zijn:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

Bijgevolg,

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} -4 & -9 & -1 \\ -4 & -7 & 1 \\ -8 & -10 & -2 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -8 \\ -9 & -7 & -10 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

De adjunctmatrix bezit een belangrijke eigenschap. Zowel links- als rechtsvermenigvuldigen van A met $\mathrm{adj}(A)$ geeft een scalaire matrix waarvan de elementen op de hoofddiagonaal gelijk zijn aan $\det(A)$:

EIGENSCHAP VAN DE ADJUNCTMATRIX

Voor elke vierkante matrix A van orde n geldt:

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\,E_n \quad \text{en} \quad \mathrm{adj}(A)\,A = \det(A)\,E_n$$

VOORBEELD

Verifieer de bovenstaande eigenschap voor de matrix $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

OPLOSSING

$$\begin{aligned} A\,\mathrm{adj}(A) &= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -4 & -8 \\ -9 & -7 & -10 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = (-8) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mathrm{adj}(A)\,A &= \begin{bmatrix} -4 & -4 & -8 \\ -9 & -7 & -10 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = (-8) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ga zelf nog na dat $\det(A) = -8$.

3.7.2. Inverse matrix van een vierkante matrix

Beschouw een getal r verschillend van nul. Dan kan men altijd een ander getal s vinden zodat $rs = sr = 1$ (nl. $s = \frac{1}{r} = r^{-1}$). Het getal s heet dan de inverse van r voor de vermenigvuldiging.

Ook voor matrices bestaat het begrip *inverse*.

DEFINITIE

Zij A een vierkante matrix van orde n. Een vierkante matrix B van orde n wordt *inverse matrix* van A genoemd als en slechts als

$$AB = E_n \quad \text{en} \quad BA = E_n$$

Merk op dat de eenheidsmatrix E_n in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dezelfde functie heeft als het getal 1 in $\mathbb{R}$. Beiden zijn neutraal voor de vermenigvuldiging in hun respectievelijke verzamelingen.

VOORBEELD

Gegeven: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. De matrix $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ is een inverse matrix van A, want

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DEFINITIE

Men noemt een vierkante matrix *inverteerbaar* als en slechts als zij een inverse matrix heeft.

Niet elke vierkante matrix heeft een inverse, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

VOORBEELD

Gegeven: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Laat zien dat deze matrix niet inverteerbaar is.

OPLOSSING

Veronderstel dat A een inverse $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ heeft. Dan geldt per definitie

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 = AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3z & y+3t \\ 2x+6z & 2y+6t \end{bmatrix}$$

wat betekent dat

$$\begin{cases} x+3z = 1 \\ 2x+6z = 0 \\ y+3t = 0 \\ 2y+6t = 1 \end{cases}$$

Dit stelsel is strijdig en heeft dus geen oplossingen voor x, y, z en t.

We kunnen ons nu de volgende vragen stellen:

a. *Welke matrices zijn inverteerbaar*?

b. *Kan een gegeven vierkante matrix meer dan één inverse hebben*?

c. *Hoe vinden we de inverse matrix als deze bestaat*?

De antwoorden op deze vragen worden gegeven in de volgende drie eigenschappen.

EIGENSCHAP (REGULARITEIT VAN EEN INVERTEERBARE MATRIX)

Voor elke vierkante matrix A geldt:

$$A \text{ heeft een inverse} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ is regulier}$$

Bewijs

Zij $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en veronderstel dat B een inverse is van A. Dan volgt uit de definitie van een inverse matrix dat $AB = E_n$. Uit de eigenschappen van het matrixproduct (p.78) volgt nu dat

$$\det(A)\ \det(B) = \det(AB) = \det(E_n) = 1$$

Deze vergelijking is enkel mogelijk als $\det(A) \neq 0$, m.a.w. als A regulier is.

Omgekeerd, veronderstel dat A regulier is. Dan zal blijken dat A inverteerbaar is. Inderdaad, we bewijzen wat verder dat de matrix $\frac{1}{\det(A)}\,\text{adj}(A)$ een inverse is van A. $\square$

EIGENSCHAP (UNICITEIT VAN DE INVERSE)

Een inverteerbare vierkante matrix heeft juist één inverse matrix.

Bewijs

Veronderstel dat B en B' inverse matrices zijn van $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. We zullen bewijzen dat $B = B'$.

Welnu,

$$
\begin{aligned}
B &= B\,E_n && E_n \text{ is neutraal voor het matrixproduct in } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).\\
&= B\,(A\,B') && \text{Definitie: } B' \text{ inverse matrix van } A.\\
&= (B\,A)\,B' && \text{Matrixproduct is associatief in } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).\\
&= E_n\,B' && \text{Definitie: } B \text{ inverse matrix van } A.\\
&= B' && E_n \text{ is neutraal voor het matrixproduct in } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \quad \square
\end{aligned}
$$

EIGENSCHAP (VERBAND TUSSEN INVERSE EN ADJUNCT)

Als de matrix $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regulier is, dan is de matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ \mathrm{adj}(A)$$

de enige inverse matrix van A.

Bewijs

Te bewijzen: $A\,A^{-1} = E_n$ en $A^{-1}A = E_n$.

$$
\begin{aligned}
A\,A^{-1} &= A\left(\frac{1}{\det(A)}\ \mathrm{adj}(A)\right) &&\\
&= \frac{1}{\det(A)}\ (A\ \mathrm{adj}(A)) && \text{gemengde associativiteitswet}\\
&= \frac{1}{\det(A)}\ (\det(A)\ E_n) && \text{eigenschap adjunctmatrix}\\
&= \left(\frac{1}{\det(A)}\ \det(A)\right)\ E_n && \text{gemengde associativiteitswet}\\
&= 1 \cdot E_n = E_n &&
\end{aligned}
$$

Het bewijs van $A^{-1}A = E_n$ verloopt analoog. $\square$

We besluiten deze sectie met enkele nuttige eigenschappen van de matrix-inverse.

EIGENSCHAPPEN VAN DE MATRIX-INVERSE

Voor alle reguliere matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ gelden:

1. $(rA)^{-1} = r^{-1}A^{-1} \quad (r \in \mathbb{R}_0)$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bewijs van eigenschap 1

Volgens de definitie van inverse matrix moeten we bewijzen dat $(rA)(r^{-1}A^{-1}) = E_n$ en $(r^{-1}A^{-1})(rA) = E_n$. We tonen de eerste gelijkheid aan:

$$\begin{aligned}(rA)(r^{-1}A^{-1}) &= (r\,r^{-1})\,(A\,A^{-1}) && \text{gemengde associativiteitswet}\\ &= 1 \cdot E_n && \text{definitie inverse matrix}\\ &= E_n\end{aligned}$$

Het bewijs van de tweede gelijkheid verloopt analoog. □

Bewijs van eigenschap 2

Volgens de definitie van inverse matrix moeten we bewijzen dat $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E_n$ en $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E_n$. We tonen de tweede gelijkheid aan:

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= \big((B^{-1}A^{-1})A\big)\,B && \text{associativiteitswet}\\ &= \big(B^{-1}(\underbrace{A^{-1}A}_{E_n})\big)\,B && \text{associativiteitswet / def. inverse mat.}\\ &= B^{-1}B && E_n \text{ neutraal voor het matrixproduct}\\ &= E_n && \text{def. inverse matrix}\end{aligned}$$

Het bewijs van de eerste gelijkheid verloopt analoog. □

3.8. MATRIXNOTATIE VAN EEN $(m \times n)$-STELSEL

Een $(m \times n)$-stelsel is een stelsel van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden.

Beschouw het volgende (2×3)-stelsel:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

We kunnen dit stelsel herschrijven met behulp van matrices:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 4y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x - 3y + z \\ x + 4y - 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

waarbij

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{coëfficiëntenmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{kolomvector van de onbekenden}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{kolomvector van de rechterleden of ‘bekenden’}$$

In het algemeen kan men elk $(m \times n)$-stelsel van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ herschrijven in matrixvorm:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad AX = B$$

waarbij

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (m \times n)\text{-coëfficiëntenmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (n \times 1)\text{-kolomvector van de onbekenden}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (m \times 1)\text{-kolomvector van de bekenden}$$

3.9. REGULIERE $(n \times n)$-STELSELS EN HUN OPLOSSING

In een $(n \times n)$-stelsel zijn er evenveel vergelijkingen als onbekenden, waardoor de coëfficiëntenmatrix vierkant is. Is deze coëfficiëntenmatrix regulier, dan spreekt men van een *regulier* $(n \times n)$*-stelsel.*

Een regulier $(n \times n)$-stelsel kan formeel gemakkelijk opgelost worden met behulp van de matrixnotatie $AX = B$:

$$\begin{array}{llll} AX = B & \Leftrightarrow & A^{-1}(AX) = A^{-1}B & \text{(linksvermenigvuldigen met } A^{-1}\text{)} \\ & \Leftrightarrow & (\underbrace{A^{-1}A}_{=E_n})X = A^{-1}B & \text{(associativiteitswet)} \\ & \Leftrightarrow & X = A^{-1}B & (E_nX = X) \end{array}$$

De kolomvector X met de oplossingen van het stelsel is dus op unieke wijze te vinden door de inverse van de coëfficiëntenmatrix links te vermenigvuldigen met de kolomvector B van de bekende rechterleden van dit stelsel.

VOORBEELD

Los op: $\begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$.

OPLOSSING

We hebben: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Het stelsel is regulier, want $\det(A) = 1 \neq 0$.

Reken eerst na: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Als oplossing vinden we dan:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

of nog

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -9 \\ z \;= 8 \end{cases}$$

3.10. DE METHODE VAN GAUSS-JORDAN

In deze sectie beschrijven we een efficiënte methode om stelsels van lineaire vergelijkingen op te lossen en vierkante matrices te inverteren.

3.10.1. Stelsels van lineaire vergelijkingen

Op stelsels kan men bepaalde operaties uitvoeren zonder dat de oplossingenverzameling verandert. De belangrijkste zijn:

- twee vergelijkingen van plaats verwisselen;
- beide leden van een vergelijking vermenigvuldigen met een getal verschillend van nul;
- bij een vergelijking een veelvoud van een andere vergelijking optellen, lid aan lid.

Dergelijke operaties heten *elementaire rijoperaties*.

De *methode van Gauss-Jordan* maakt gebruik van elementaire-rijoperaties om een gegeven lineair stelsel om te vormen in een equivalent stelsel waaruit de oplossing gemakkelijk te bepalen is.

Hierbij is het handig het $(m \times n)$-stelsel weer te geven met behulp van een $(m \times (n+1))$-matrix via het toevoegen van de kolom met de bekende rechterleden aan de coëfficiëntenmatrix van dat stelsel (gescheiden door een verticale streep). Zo'n matrix noemen we *uitgebreide matrix*. Elke elementaire rij-transformatie op het stelsel kan dan eenvoudig worden uitgevoerd op de uitgebreide matrix van dat stelsel.

Methode van Gauss-Jordan

- *Stap 1.* Transformeer de elementen onder de hoofddiagonaal van de coëfficiëntenmatrix in nullen aan de hand van elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix. Werk hierbij kolom per kolom en van links naar rechts.
- *Stap 2.* Laat eventuele nulrijen in de bekomen uitgebreide matrix weg. Deze komen namelijk overeen met vergelijkingen van de vorm $0 = 0$ (die steeds voldaan zijn).
- *Stap 3.* Transformeer elk hoofddiagonaalelement verschillend van nul van de coëfficiëntenmatrix in de waarde 1 door de betrokken rij in de uitgebreide matrix te delen door de waarde van het hoofddiagonaalelement.
- *Stap 4.* Zet de elementen boven elke 1 op de hoofddiagonaal van de coëfficiëntenmatrix om in nullen door middel van elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix.

We illustreren deze methode met enkele voorbeelden.

VOORBEELD 1

Los op: $\begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$

OPLOSSING

De uitgebreide matrix van het stelsel is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

We passen de methode van Gauss-Jordan toe. Ter informatie laten we telkens het effect op het bijbehorende stelsel zien.

Stap 1. Nullen creëren onder de hoofddiagonaal van de coëfficiëntenmatrix.

We beginnen met de eerste kolom. Omwisseling van de eerste en de derde rij (notatie: $R_1 \leftrightarrow R_3$) levert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x \phantom{{}+2y} + z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Daarna trekken we van de tweede vergelijking de eerste af (notatie: $R_2 - R_1$) en van de derde vergelijking tweemaal de eerste ($R_3 - 2R_1$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x \phantom{{}+2y} + z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x \phantom{{}-2y} + z = 3 \\ \phantom{x-{}} y + z = -1 \\ - 2y - 3z = -6 \end{cases}$$

Hiermee is de eerste kolom ‘schoongeveegd’. Merk nu op dat de onbekende x geëlimineerd is uit de twee onderste vergelijkingen.

Nu komt de tweede kolom aan de beurt. Hierbij moeten we opletten dat de verkregen nullen in de eerste kolom niet verloren gaan. Dit kunnen we bereiken door bij de derde vergelijking tweemaal de tweede vergelijking op te tellen (notatie: $R_3 + 2R_2$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x \phantom{{}-2y} + z = 3 \\ \phantom{x-{}} y + z = -1 \\ - 2y - 3z = -6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_3 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x \phantom{{}+y} + z = 3 \\ y + z = -1 \\ - z = -8 \end{cases}$$

Stap 2. Er zijn geen nulrijen en dus geen identieke vergelijkingen in het resulterende stelsel.

Stap 3. Hoofddiagonaalelementen verschillend van nul van de coëfficiëntenmatrix transformeren in 1.

Dit kunnen we bereiken door de derde vergelijking te vermenigvuldigen met -1 (notatie: $-R_3$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x \phantom{{}+y} + z = 3 \\ y + z = -1 \\ - z = -8 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x \phantom{{}+y} + z = 3 \\ y + z = -1 \\ \phantom{x+y+{}} z = 8 \end{cases}$$

Stap 4. Nullen creëren boven elke 1 op de hoofddiagonaal van de coëfficiëntenmatrix.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \quad \left\{\begin{array}{l} x \quad + z = 3 \\ y + z = -1 \\ z = 8 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \quad = -5 \\ y \quad = -9 \\ z = 8 \end{array}\right.$$

Door het gebruik van elementaire rijoperaties heeft het laatste stelsel dezelfde oplossingenverzameling als het gegeven stelsel. Deze oplossingenverzameling is dus:

$$\mathcal{V} = \{(-5, -9, 8)\}$$

VOORBEELD 2

Los op: $\left\{\begin{array}{r} -x + 3y + 2z = 2 \\ 2x - 2y - z = 3 \\ x + y + z = 5 \end{array}\right.$.

OPLOSSING

Stap 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Stap 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \end{array}\right]$$

Stap 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{array}\right]$$

Stap 4.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{array}\right]$$

Het gegeven stelsel is dus equivalent met

$$\begin{cases} x + \frac{1}{4}z = \frac{13}{4} \\ y + \frac{3}{4}z = \frac{7}{4} \end{cases} \quad \text{of nog} \quad \begin{cases} x = \frac{13}{4} - \frac{1}{4}z \\ y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}z \end{cases}$$

De waarde van z kan willekeurig gekozen worden. Is deze waarde bekend, dan liggen ook de waarden van x en y vast. De oplossingenverzameling $\mathcal{V}$ van het stelsel is dus te schrijven als:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \left\{(x, y, z) \mid x = \tfrac{13}{4} - \tfrac{1}{4}r,\ y = \tfrac{7}{4} - \tfrac{3}{4}r,\ z = r,\ r \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\left(\tfrac{13}{4} - \tfrac{1}{4}r, \tfrac{7}{4} - \tfrac{3}{4}r, r\right) \mid r \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

VOORBEELD 3

Los op: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$.

OPLOSSING

Stap 1.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 3R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

De methode van Gauss-Jordan kunnen we nu stopzetten. De laatste rij correspondeert met een valse vergelijking, nl. $0 = 3$. De oplossingenverzameling van dit stelsel is dus ledig.

3.10.2. Inverteren van een vierkante matrix

Veronderstel A is een reguliere vierkante matrix van orde n. In sectie 3.7.2 hebben we gezien dat A een unieke inverse matrix $B = \left[b_{ij}\right]$ heeft. Deze inverse matrix voldoet o.a. aan de voorwaarde

$$AB = E_n$$

die zelf equivalent is met het geheel van n matrixvergelijkingen

$$A\,B^{<1>} = E_n^{<1>}, \quad A\,B^{<2>} = E_n^{<2>}, \quad \ldots \quad , \quad A\,B^{<n>} = E_n^{<n>},$$

waarbij voor elke $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} B^{<k>} &= [b_{ik}]_{n\times 1} && \text{de } k\text{-de kolommatrix van } B \\ E_n^{<k>} &= [\delta_{ik}]_{n\times 1} && \text{de } k\text{-de kolommatrix van } E_n \end{aligned}$$

De kolommatrices $B^{<1>}, B^{<2>}, \ldots, B^{<n>}$ zijn ook te vinden door de stelsels die corresponderen met de matrixvergelijkingen $AX = E_n^{<1>}$, $AX = E_n^{<2>}$, …, $AX = E_n^{<n>}$ op te lossen met de methode van Gauss-Jordan. Hierbij is de uitgebreide matrix van elk stelsel als volgt te transformeren door middel van elementaire rijoperaties:

$$[A \,|\, E_n^{<k>}] \to \cdots \to [E_n \,|\, B^{<k>}] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Omdat de benodigde elementaire rijoperaties dezelfde zijn voor elk stelsel – deze stelsels hebben namelijk dezelfde coëfficiëntenmatrix A – kunnen we alle uitgebreide matrices als volgt samenvoegen:

$$[A \,|\, E_n^{<1>}\ E_n^{<2>}\ \ldots\ E_n^{<n>}] \to \cdots \to [E_n \,|\, B^{<1>}\ B^{<2>}\ \ldots\ B^{<n>}]$$

Dit levert een procedure op voor het vinden van de inverse matrix van een reguliere vierkante matrix $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- *Stap 1.* Vorm de uitgebreide matrix $[A \,|\, E_n]$.
- *Stap 2.* Transformeer $[A \,|\, E_n]$ in $[E_n \,|\, B]$ met elementaire rijoperaties. De resulterende matrix B is dan gelijk aan de inverse A^{-1} van A.

VOORBEELD

Vind de inverse van $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

OPLOSSING

Stap 1. Uitgebreide matrix: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Stap 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\1&3&4&0&1&0\\1&4&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-3R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&4&0&-3\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-3R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-3&-3\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right]$$

We concluderen:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

Reken ter controle na dat $AA^{-1}=E_3$ en $A^{-1}A=E_3$.

3.11. TOEPASSING IN DE ECONOMIE: HET OPEN INPUT-OUTPUTMODEL VAN LEONTIEF

In deze sectie beschrijven we een belangrijke economische toepassing van matrices, het open input-outputmodel van Leontief[1]. Dit model beschrijft de productie en het verbruik van de diverse sectoren die deel uitmaken van een economie.

Nemen we als voorbeeld een economie met twee sectoren: olie en elektriciteit. In deze economie bestaan er twee vraagtypes:

- de externe vraag naar olie en elektriciteit door de huishoudens, het buitenland of andere sectoren buiten de beschouwde economie (de zogeheten *finale vraag*)

[1]Wassily Leontief, 1906–1999, Russisch econoom. Hij won in 1973 de Nobelprijs voor economie voor het ontwikkelen van de 'input-outputmethode' en de toepassingen daarvan op economische planningsproblemen.

- de interne vraag van de olie- en elektriciteitsector zelf naar olie en elektriciteit (de *intermediaire vraag*). Deze intermediaire vraag hangt af van de totale outputs van de olie- en elektriciteitssector.

Voor een economie met n sectoren gebruiken we nu de volgende notaties:

x_i: het totaal aantal eenheden dat sector i produceert in een gegeven tijdspanne (*totale output*);

t_{ij}: het aantal eenheden uit sector i die nodig zijn voor de productie van één eenheid in sector j (*technologische coëfficiënt*);

f_i: het extern gevraagd aantal eenheden uit sector i (finale vraag).

Aangenomen dat de inputbehoeften recht evenredig zijn met de output, dan is

$t_{ij}x_j$ = benodigd aantal eenheden uit sector i voor de productie van x_j eenheden in sector j.

Om x_1 eenheden in sector 1, x_2 eenheden in sector 2, …en x_n eenheden in sector n te produceren, moet sector i voldoen aan een totale intermediaire vraag van

$$t_{i1}x_1 + t_{i2}x_2 + \cdots + t_{in}x_n$$

eenheden. Hierbij komt nog een finale vraag van f_i eenheden. Voor sector i dient de vraag en het aanbod in evenwicht te zijn, dus

$$x_i = t_{i1}x_1 + t_{i2}x_2 + \cdots + t_{in}x_n + f_i$$

Vermits deze vergelijking opgaat voor elke sector i ($i \in \{1, 2, \ldots n\}$), heerst er evenwicht tussen vraag en aanbod in de economie als en slechts als aan het volgend ($n \times n$)-stelsel voldaan is:

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1n}x_n + f_1 \\ x_2 = t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \cdots + t_{2n}x_n + f_2 \\ \qquad\vdots \\ x_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n + f_n \end{cases}$$

Dit stelsel kan beknopt met wat matrix-algebra uitgedrukt worden:

$$X = TX + F \tag{3.1}$$

waarbij

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$ de technologische matrix

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ de kolomvector van de totale outputs per sector

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$ de kolomvector van de finale vraag per sector

Vergelijking (3.1) heet de *input-outputvergelijking* van de betreffende economie. Deze vergelijking kan verder als volgt herschreven worden:

$$\begin{aligned} X = TX + F \quad &\Leftrightarrow \quad X - TX = F \\ &\Leftrightarrow \quad E_n X - TX = F \\ &\Leftrightarrow \quad (E_n - T)X = F \end{aligned}$$

De $(n \times n)$-matrix

$$L = E_n - T$$

wordt de *Leontiefmatrix* genoemd. De input-outputvergelijking (3.1) is dan equivalent met

$$LX = F \tag{3.2}$$

Als de Leontiefmatrix L regulier is, dan is (3.2) equivalent met

$$X = L^{-1}F \tag{3.3}$$

Vergelijking (3.3) laat toe om de outputs per sector te berekenen, als voldaan moet worden aan een gegeven finale vraag per sector.

Als de finale vraag naar producten van één of meerdere sectoren verandert, dan zal de productie binnen de economie zich moeten aanpassen om het evenwicht tussen vraag en aanbod te behouden. Met de input-outputvergelijking is nu te berekenen hoe dat precies zal moeten gebeuren. Veronderstel daarvoor dat de finale vraag F verandert met ΔF, waarbij

$$\Delta F = \begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{bmatrix}$$

zodat de nieuwe finale vraag gelijk is aan

$$F + \Delta F = \begin{bmatrix} f_1 + \Delta f_1 \\ f_2 + \Delta f_2 \\ \vdots \\ f_n + \Delta f_n \end{bmatrix}$$

Met welke waarden moeten de totale outputs per sector dan veranderen om aan deze nieuwe finale vraag te kunnen voldoen? Als we deze wijzigingen in de totale outputs voorstellen met

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

dan is

$$X + \Delta X = \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ \vdots \\ x_n + \Delta x_n \end{bmatrix}$$

de nieuwe totale output die beantwoordt aan de nieuwe finale vraag $F+\Delta F$. Uit vergelijking (3.3) volgt dan

$$\begin{aligned} X + \Delta X &= L^{-1}(F + \Delta F) \\ &= \underbrace{L^{-1}F}_{=X} + L^{-1}\Delta F \end{aligned}$$

waardoor

$$\Delta X = L^{-1}\Delta F \tag{3.4}$$

VOORBEELD

Beschouw de volgende input-outputtabel voor een economie met twee sectoren S_1 en S_2:

		Input		
		S_1	S_2	Finale levering
Output	S_1	200	300	300
	S_2	100	100	300

Deze tabel beschrijft de intermediaire en finale vraag naar producten uit de diverse sectoren in een gegeven tijdspanne.

Neem aan dat voor elke sector de totale output net genoeg is om aan de intermediaire en finale vraag te voldoen en dat de input-behoeften recht evenredig zijn met de totale output. Bepaal dan

(a) de kolomvector X met totale outputs,

(b) de technologische matrix T,

(c) de kolomvector met nieuwe totale outputs als de finale vraag bij sector S_2 toeneemt met 70 eenheden.

OPLOSSING

(a) De totale output van sector S_i vinden we door de getallen op de i-de rij van de input-outputtabel op te tellen. Zodoende,

$$X = \begin{bmatrix} 200 + 300 + 300 \\ 100 + 100 + 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 500 \end{bmatrix}$$

(b) De eerste kolom van T bevat per definitie de inputs uit sectoren S_1 en S_2 die nodig zijn om één eenheid in sector S_1 te produceren. Via de S_1-kolom van de input-outputtabel en het antwoord op vraag (a) weten we nu dat er 200 eenheden S_1 en 100 eenheden S_2 nodig zijn om een totale output van 800 eenheden S_1 te realiseren. Hieruit volgt dat er $\frac{200}{800}$ S_1-eenheden en $\frac{100}{800}$ S_2-eenheden nodig zijn voor de productie van één S_1-eenheid. Dat wil zeggen, de eerste kolom van T is te vinden door de elementen in de S_1-kolom van de input-outputtabel te delen door de totale S_1-output. Op analoge wijze is de tweede kolom van T te bepalen door de S_2-kolom uit de input-outputtabel te delen door totale S_2-output. Zodoende,

$$T = \begin{bmatrix} \frac{200}{800} & \frac{300}{500} \\ \frac{100}{800} & \frac{100}{500} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

(c) Uit de vraagstelling volgt $\Delta F = \begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \end{bmatrix}$. Met behulp van vergelijking (3.4) zijn de corresponderende wijzigingen $\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$ in de totale output te berekenen. Hiervoor bepalen we eerst de Leontiefmatrix $L = E_2 - T$ en haar inverse:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{8} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} = \frac{1}{\det(L)} \operatorname{adj}(L) = \frac{40}{21} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{32}{21} & \frac{8}{7} \\ \frac{5}{21} & \frac{10}{7} \end{bmatrix}$$

Vervolgens,

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \frac{32}{21} & \frac{8}{7} \\ \frac{5}{21} & \frac{10}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \end{bmatrix}$$

zodat de gevraagde nieuwe totale-outputvector gegeven is door

$$X + \Delta X = \begin{bmatrix} 800 \\ 500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 880 \\ 600 \end{bmatrix}$$

Merk op dat ook sector S_1 extra output moet leveren, ondanks het feit dat er geen wijziging is in de finale vraag naar producten van deze sector. Immers, door de toename van de finale vraag bij sector S_2 dient deze haar output te verhogen. Hierdoor is er dan weer meer input uit sector S_1 nodig, waardoor deze ook meer gaat produceren.