CAPÍTULO 15

OSCILACIONES LIBRES

15.1. Oscilador libre sin amortiguamiento. Fuerza recuperadora lineal. Movimiento vibratorio armónico

Las oscilaciones mecánicas juegan un papel de primer orden no sólo desde el punto de vista científico sino también técnico, como resulta evidente al mencionar la importancia que tienen los problemas vibratorios que surgen en rotores excéntricos de motores y turbinas, el efecto de las vibraciones sobre estructuras −en particular, en condiciones de resonancia− y la utilización de vibraciones en transportadores, tolvas, compactadores o en procesos de acabado, por mencionar sólo unas pocas aplicaciones.

Consideremos un sistema dinámico con f grados de libertad; su configuración vendrá definida por el sistema de coordenadas propias q

$$q \equiv q_1, q_2, \ldots, q_f$$

Supongamos que tal sistema admite una configuración de equilibrio estable, definida por

$$q_0 \equiv q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{f0} \tag{15.1}$$

Si el sistema se mueve sus coordenadas −al menos una− variarán en el tiempo.

> *El movimiento es una **oscilación** según la coordenada q_k −por ejemplo− si tal coordenada varía en el tiempo tomando alternativamente valores superiores e inferiores al valor de equilibrio, q_{k0}, y pasando por éste (fig. 15.1).*

La causa de tal comportamiento es la existencia de fuerzas en el sistema −denominadas *fuerzas recuperadoras*− que surgen al desplazarle de su posición de equilibrio, y que tratan de llevarle nuevamente a él.

En este capítulo vamos a considerar sistemas con un único grado de libertad, dejando para más adelante el estudio de sistemas con múltiples grados de libertad.

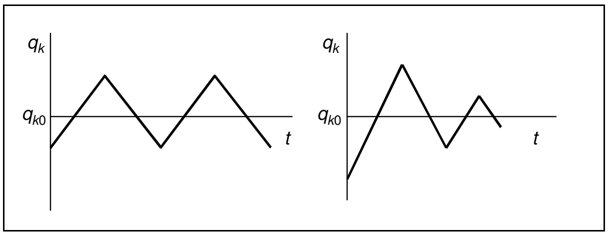


FIG. 15.1.

Para analizar las oscilaciones de sistemas con *un grado de libertad* vamos a utilizar los siguientes supuestos:

- La posición de equilibrio estable se elige como origen para la coordenada q

$$q_0 = 0 \tag{15.2}$$

- La fuerza recuperadora generalizada es función exclusiva de la posición (en general podría ser función también de la velocidad)

$$Q = Q(q) \tag{15.3}$$

- La función (15.3) admite desarrollo en serie de MacLaurin

$$Q(q) = Q(q_0) + \left(\frac{dQ}{dq}\right)_0 q + {}^1\!/_2 \left(\frac{d^2Q}{dq^2}\right)_0 q^2 + \dots \tag{15.4}$$

Como el origen se ha elegido en la configuración de equilibrio, $Q(q_0)$ debe ser nula según (14.39), y el desarrollo (15.4) se reduce a

$$Q(q) = \left(\frac{dQ}{dq}\right)_0 q + {}^1\!/_2 \left(\frac{d^2Q}{dq^2}\right)_0 q^2 + \dots \tag{15.5}$$

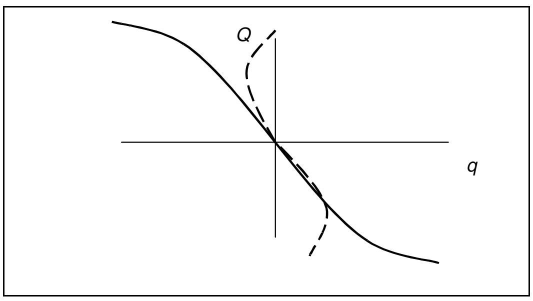


FIG. 15.2.

En la mayor parte de los casos el coeficiente $(dQ/dq)_0$ es no nulo, y la representación gráfica de la dependencia de la fuerza Q con el desplazamiento q es de la forma de la figura 15.2, con un tramo recto o aproximadamente recto en torno al origen. Como puede observarse, la pendiente en el origen $(dQ/dq)_0$ es negativa, como corresponde a una fuerza recuperadora, cuya intensidad aumenta al incrementarse la desviación respecto del equilibrio.

Teniendo en cuenta el valor negativo de la pendiente, se puede definir una constante de proporcionalidad positiva, k, conocida como *constante elástica* o *rigidez*, tal que

$$k = -\left(\frac{dQ}{dq}\right)_0 > 0 \tag{15.6}$$

y con ella (15.5) pasa a ser

$$Q(q) = -kq + 1/2\left(\frac{d^2Q}{dq^2}\right)_0 q^2 + \dots \tag{15.7}$$

I. FUERZA RECUPERADORA LINEAL

Si se consideran *pequeñas* desviaciones de la posición respecto de la configuración de equilibrio, es decir, valores de q para los cuales los restantes términos del desarrollo (15.7) son despreciables frente al primero, la fuerza se reduce al término lineal

$$\boxed{Q(q) = -kq} \tag{15.8}$$

de modo que

> *la fuerza recuperadora es proporcional al desplazamiento respecto de la posición de equilibrio, lo que se conoce como **ley de Hooke**.*

Tal dependencia es una aproximación útil, en general, cuando las amplitudes de oscilación son pequeñas. Cuando tal aproximación no describa adecuadamente el comportamiento del sistema habrá que considerar más términos del desarrollo (15.7), con lo que la fuerza no es ya lineal; éste es el caso de las oscilaciones no lineales o alineales. Incluso es posible que $(dQ/dq)_0$ sea nulo, en cuyo caso el oscilador −esto es, el sistema oscilante− se dice intrínsecamente alineal.

a) *Masa y muelle*

Una masa sujeta a un muelle constituye un oscilador cuya fuerza recuperadora puede considerarse lineal en un intervalo relativamente amplio de desviaciones respecto de la posición de equilibrio. Por ello también se utiliza como símbolo de un sistema oscilante sometido a una fuerza recuperadora lineal.

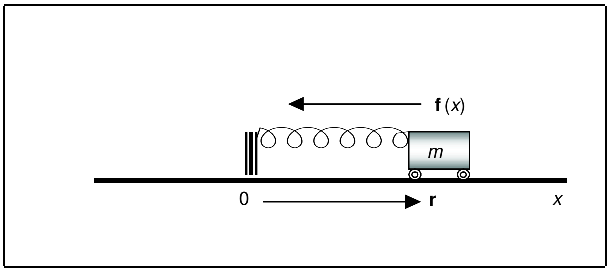


FIG. 15.3.

En el caso unidimensional de la figura 15.3, la coordenada propia es $q = x$. El trabajo virtual de la fuerza elástica que origina el muelle −que supondremos hacia la derecha, $\mathbf{f} = f\mathbf{i}$− en un desplazamiento virtual en el sentido positivo del eje X, $\delta\mathbf{r} = \delta x\mathbf{i}$, viene dado por

$$\delta W = \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{r} = f\mathbf{i}\cdot\delta x\mathbf{i} = f\delta x = Q\delta q$$

con lo que la fuerza generalizada es la fuerza elástica, $Q = f$, y la ley de Hooke (15.8) se expresa

$$f = -kx \tag{15.9}$$

siendo k la constante elástica del muelle. Vectorialmente

$$\mathbf{f} = -kx\mathbf{i} = -k\mathbf{r}$$

quedando de manifiesto la tendencia de la fuerza recuperadora de llevar al sistema a la posición de equilibrio estable.

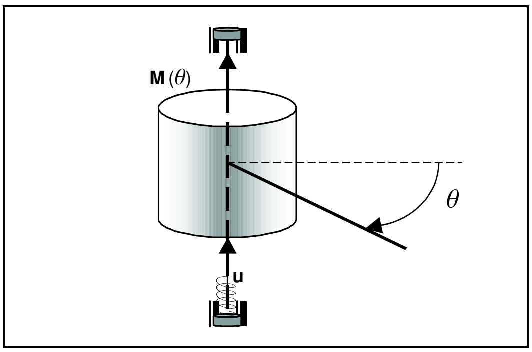


FIG. 15.4.

b) *Resorte en espiral*

Si se trata de un muelle en espiral (fig. 15.4) la coordenada que mide la desviación respecto de la posición de equilibrio es angular, $q = \theta$. Designando con **u** el vector unitario según el eje de giro, el trabajo virtual del *momento recuperador* $\mathbf{M} = M\mathbf{u}$ en un desplazamiento angular virtual $\delta\vec{\theta} = \delta\theta\mathbf{u}$ viene dado, según (14.45), por

$$\delta W = \mathbf{M} \cdot \delta\vec{\theta} = M\mathbf{u} \cdot \delta\theta\mathbf{u} = M\delta\theta = Q\delta q$$

de modo que la fuerza generalizada es en este caso el momento recuperador, $Q = M$, y la ley de Hooke (15.8) se expresa

$$M = -k\theta \tag{15.10}$$

siendo k la constante de torsión del resorte.

c) *Asociación de muelles*

- *En paralelo* (fig. 15.5).

Si se ejerce una fuerza F sobre muelles en paralelo de constantes k_i, $i = 1, 2, \ldots$, la fuerza que soporta cada muelle individualmente es $F_i = k_i x$, siendo x el desplazamiento común a todos los muelles. Por tanto, como

$$F = \sum_i F_i = \left(\sum_i k_i \right) x = k_{\text{eq}} x$$

la constante elástica equivalente es

$$k_{\text{eq}} = \sum_i k_i$$

o sea, el sistema de muelles puede ser sustituido por un único muelle de constante k_{eq} que originará el mismo efecto.

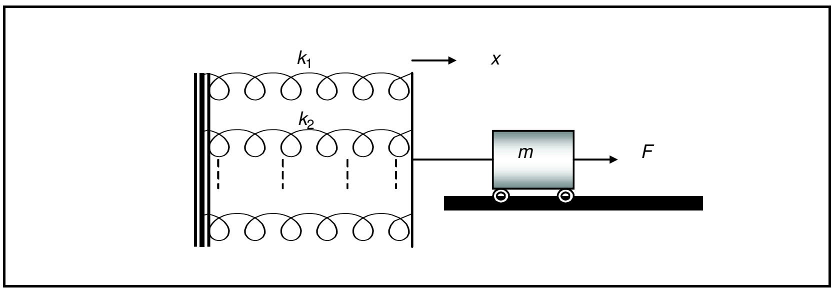


FIG. 15.5.

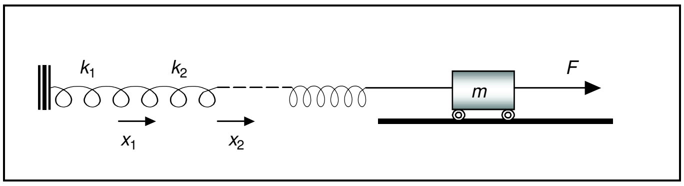


FIG. 15.6.

- *En serie* (fig. 15.6).

Si es F la fuerza que se ejerce sobre muelles en serie de constantes k_i, $i = 1, 2, \ldots$, la fuerza que soporta cada uno de ellos es la misma, $F = k_i x_i$, pues al alcanzar la elongación máxima se comportan como elementos rígidos y transmiten la fuerza al siguiente muelle. Sin embargo, el desplazamiento x_i de cada muelle es diferente si son distintas sus constantes elásticas; en cualquier caso, el desplazamiento total que experimenta el sistema de muelles, x, es la suma de los desplazamientos parciales de cada uno de ellos,

$$x = \sum_i x_i = \sum_i \frac{F}{k_i} = \frac{F}{k_{\text{eq}}}$$

de modo que

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{k_i}$$

y el sistema de muelles puede ser sustituido por un único muelle de constante k_{eq} que originará el mismo efecto.

II. ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

La ley de Hooke define una fuerza generalizada conservativa de acuerdo con (14.29)

$$Q = -\frac{\partial U(q)}{\partial q} = -kq \tag{15.11}$$

siendo la energía potencial asociada

$$U(q) = \tfrac{1}{2} k q^2 + \text{cte} = U(q_0) + \tfrac{1}{2} k q^2 \tag{15.12}$$

que se reduce a

$$\boxed{U(q) = \tfrac{1}{2} k q^2, \quad \text{con } U(q_0) = 0} \tag{15.13}$$

es decir, tomando como nivel cero de energía potencial la correspondiente a la posición de equilibrio. Las ec. (15.12-13) expresan la dependencia parabólica de la energía potencial con q, válida en la aproximación lineal.

La energía cinética es

$$T(\dot{q}) = {}^1\!/\!_2 m\dot{q}^2 \tag{15.14}$$

siendo m la masa del cuerpo $-$si q es lineal$-$ o el momento de inercia del cuerpo respecto del eje de giro $-$si q es angular$-$. La lagrangiana es, pues,

$$L(q,\dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q) = {}^1\!/\!_2 m\dot{q}^2 - {}^1\!/\!_2 k q^2 \tag{15.15}$$

y la ecuación del movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} = 0 \tag{15.16}$$

es

$$m\ddot{q} + kq = 0 \tag{15.17}$$

o bien

$$\boxed{\ddot{q} + \omega_o^2 q = 0} \tag{15.18}$$

con

$$\boxed{\omega_o^2 \equiv \frac{k}{m}} \tag{15.19}$$

siendo ω_0 la **pulsación** o **frecuencia angular** del oscilador, *real* y *positiva*. (15.18) es la ecuación diferencial del movimiento para *pequeñas* oscilaciones del sistema.

La solución de (15.18) es, con A_1 y A_2 constantes,

$$q(t) = A_1 e^{i\omega_o t} + A_2 e^{-i\omega_o t}$$

o bien, al ser ω_o real,

$$q(t) = a \left\{ \begin{smallmatrix} \text{sen} \\ \cos \end{smallmatrix} \right\} (\omega_o t + \varphi) \tag{15.20}$$

siendo la velocidad

$$\dot{q}(t) = a\,\omega_0 \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ -\,\text{sen} \end{smallmatrix} \right\} (\omega_o t + \varphi) \tag{15.21}$$

a) *Principio de superposición*

Dado que estamos considerando el dominio lineal de la fuerza, la ecuación del movimiento (15.18) también es lineal, cumpliéndose el principio de superposición que afirma, en relación al movimiento del oscilador, que si $q_1(t)$ y $q_2(t)$ son soluciones de la ecuación del movimiento, $q_1(t) + q_2(t)$ también lo es. Esto permite considerar como general el comportamiento del oscilador lineal bajo la acción de una determinada fuerza recuperadora, simplificando enormemente su estudio.

b) *Determinación de a y φ*

La constante a es la *amplitud* de la oscilación, máximo valor de la desviación −igual a un lado que al otro de la posición de equilibrio− pues la función seno o coseno tiene de valor extremo ± 1. El argumento de la función sinusoidal, $(\omega_o t + \varphi)$, es la *fase*, y φ es la *fase inicial*.

Las constantes a y φ se determinan conociendo el estado de movimiento −posición y velocidad− del oscilador en un determinado instante, que se suele tomar como inicial ($t = 0$). En efecto, si $q(0)$ y $\dot{q}(0)$ son conocidas, las relaciones

$$q(0) = a \left\{ {\text{sen} \atop \cos} \right\} \varphi \quad \dot{q}(0) = a\,\omega_o \left\{ {\cos \atop -\text{sen}} \right\} \varphi$$

permiten obtener a y φ, pues

$$\omega_o \frac{q(0)}{\dot{q}(0)} = \left\{ {\text{tg} \atop -\text{ctg}} \right\} \varphi$$

y

$$q^2(0) + \frac{1}{\omega_o^2}\dot{q}^2(0) = a^2$$

c) *Movimiento vibratorio armónico*

Un movimiento es

> ***vibratorio armónico*** *−o armónico simple− respecto de una coordenada q_k si tal coordenada varia sinusoidalmente con el tiempo y con amplitud constante.*

La variación temporal de q en (15.20) satisface ambos requisitos, por lo que el movimiento del oscilador lineal que estamos considerando es vibratorio armónico. Una ecuación diferencial de la forma (15.18) corresponde, pues, a un oscilador armónico, pues sus soluciones son de la forma (15.20).

d) *Movimiento periódico*

Un movimiento es

> ***periódico*** *−respecto de una coordenada− si el estado de movimiento relativo a la misma se repite cada vez que transcurre un intervalo dado de tiempo, denominado* **período** τ.

Así, si el movimiento es periódico respecto de la coordenada q del oscilador monodimensional que se está considerando, se debe cumplir que

$$q(t) = q\,(t + n\tau) \quad \text{y} \quad \dot{q}(t) = \dot{q}\,(t + n\tau)$$

El movimiento vibratorio armónico (m.v.a.) del oscilador lineal será periódico si se cumple que

$$\begin{aligned} q &= a \,\mathrm{sen}\,(\omega_o t + \varphi) = a \,\mathrm{sen}\,[\omega_o\,(t + n\tau_o) + \varphi] = \\ &= a \,\mathrm{sen}\,[\omega_o t + \varphi + n\,\omega_o \tau_o] \end{aligned} \tag{15.22}$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= a\,\omega_o \cos\,(\omega_o t + \varphi) = a\,\omega_o \cos\,[\omega_o\,(t + n\tau_o) + \varphi] = \\ &= a\,\omega_o \cos\,[\omega_o t + \varphi + n\,\omega_o \tau_o] \end{aligned} \tag{15.23}$$

Ahora bien, las funciones circulares seno y coseno satisfacen las relaciones

$$\left\{ {\mathrm{sen} \atop \cos} \right\} \alpha = \left\{ {\mathrm{sen} \atop \cos} \right\} (\alpha + 2n\pi)$$

de modo que se cumplen (15.22-23) cuando

$$n\,\omega_o\,\tau_o = 2n\pi$$

En consecuencia el movimiento vibratorio armónico es periódico, de período τ_o dado por

$$\tau_o = 2\pi/\omega_o \tag{15.24}$$

resultando ser independiente de la amplitud −o de la energía total−. El oscilador cuyo período −si lo tiene− satisface esta característica se denomina **isocrono**.

El **período** *es el tiempo en que se realiza una oscilación*. Su inverso, la **frecuencia** ν,

$$\nu = 1/\tau$$

es el número de oscilaciones en la unidad de tiempo. La **frecuencia angular**,

$$\omega = 2\pi/\tau$$

es, pues, *el número de oscilaciones en* 2π *veces la unidad de tiempo*. De ahí que no tenga sentido físico un valor negativo de la pulsación.

e) *Energía*

Teniendo en cuenta la expresión de la velocidad

$$\dot{q} = a\,\omega_o \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ -\mathrm{sen} \end{smallmatrix} \right\} (\omega_o t + \varphi)$$

se puede escribir la energía cinética como

$$\begin{aligned} T &= {}^1\!/\!_2 m\dot{q}^2 = {}^1\!/\!_2 m \left[a\,\omega_o \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ -\mathrm{sen} \end{smallmatrix} \right\} (\omega_o t + \varphi) \right]^2 = {}^1\!/\!_2 k a^2 \left[1 - \left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{sen}^2 \\ \cos^2 \end{smallmatrix} \right\} (\omega_o t + \varphi) \right] = \\ &= {}^1\!/\!_2 k \left[a^2 - q^2 \right] \end{aligned} \qquad (15.25)$$

resultando máxima $(= {}^1\!/\!_2 k a^2)$ en la posición de equilibrio, y mínima (= 0) en los puntos extremos de la oscilación.

La energía mecánica total es, con (15.25),

$$E = T + U = {}^1\!/\!_2 k \left[a^2 - q^2 \right] + {}^1\!/\!_2 k q^2 = {}^1\!/\!_2 k a^2 = \mathrm{cte}$$

siendo constante, como corresponde al caso de fuerza conservativa.

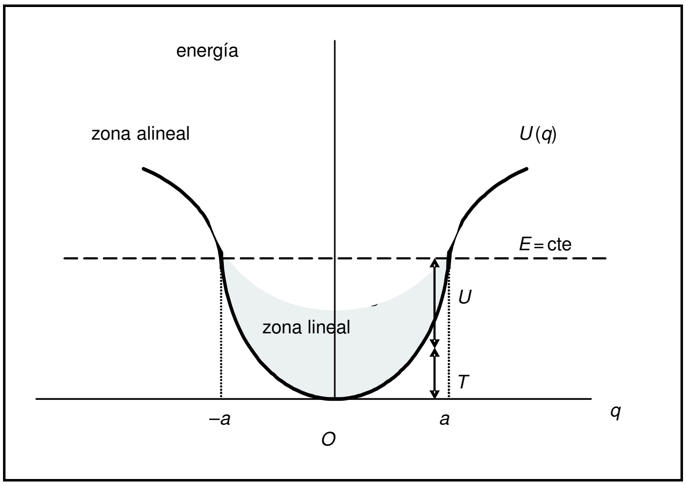


Fig. 15.7.

En la figura 15.7 se muestra gráficamente las relaciones entre las energías cinética, potencial y total, de modo que en el movimiento del oscilador hay una transformación continua entre energía cinética y potencial en forma tal que su suma mantiene la tasa de energía total constante. Como ya se ha dicho, la energía potencial tiene forma parabólica en la aproximación lineal; términos con potencias de q superiores a 2 dan lugar a desviaciones respecto de la dependencia parabólica que han de ser considerados a partir de un cierto valor del desplazamiento.

f) *Trayectoria fásica*

El espacio de configuración permite representar la posición de un sistema mediante un punto, cualquiera que sea el número, f, de grados de libertad del mismo. Se puede dar un paso más y definir el **espacio fásico** o de las fases, de $2f$ dimensiones, correspondientes a las f coordenadas propias, q, y a las f velocidades propias, $\dot{q}$. En dicho espacio *el estado de movimiento del sistema viene representado por un punto*, y los sucesivos estados de movimiento por los que va pasando al transcurrir el tiempo definen una curva llamada **trayectoria fásica**. En el caso que nos ocupa del oscilador lineal monodimensional es fácil obtener la forma de las trayectorias fásicas, pues de la ecuación

$$E = T + U = {}^1\!/\!{}_2 m\dot{q}^2 + {}^1\!/\!{}_2 kq^2 \tag{15.26}$$

resulta

$$\frac{\dot{q}^2}{2E/m} + \frac{q^2}{2E/k} = 1$$

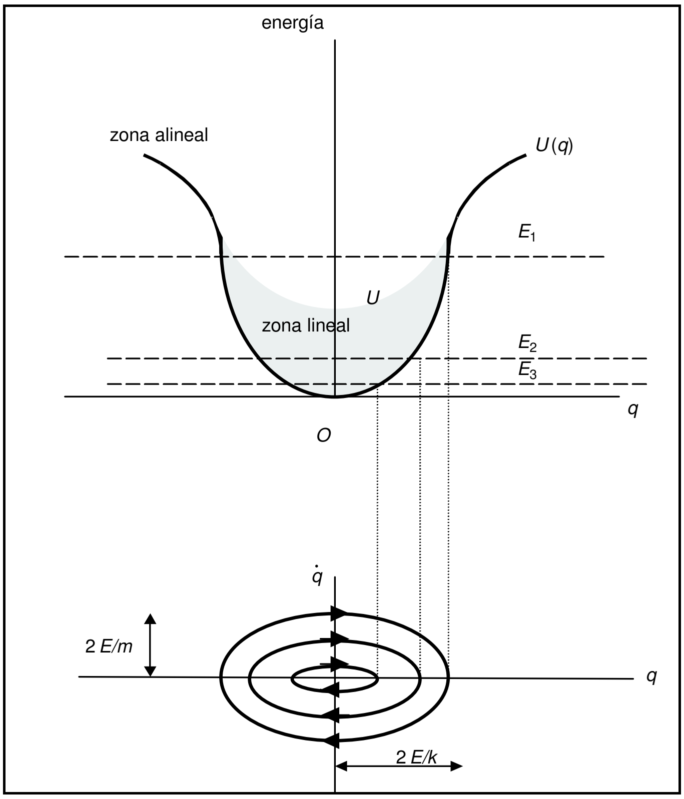


FIG. 15.8.

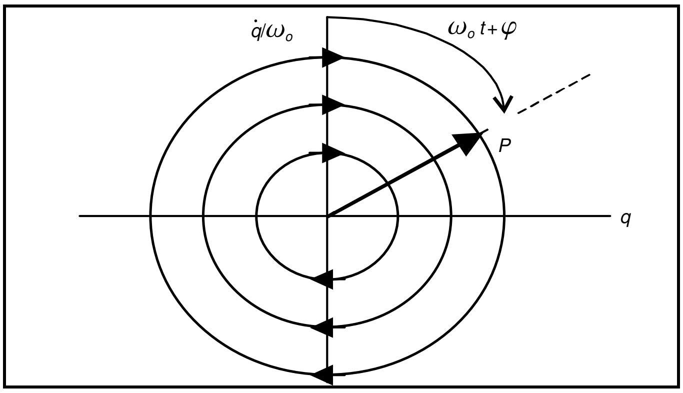


FIG. 15.9.

que es la ecuación de una elipse (fig. 15.8) de semiejes $2E/k$ y $2E/m$. Para distintos valores de la energía total del oscilador, E, distintos son los semiejes y distintas −pero semejantes− las elipses.

La ec. (15.26) también puede escribirse como

$$\frac{\dot{q}^2}{\omega_o^2} + q^2 = \frac{2E}{k} = a^2$$

ecuación que −en el espacio fásico $\left(q, \frac{\dot{q}}{\omega_o}\right)$− corresponde a circunferencias de radio $\sqrt{\frac{2E}{k}} = a$ (fig. 15.9).

El punto P representativo del estado dinámico instantáneo del oscilador se encontrará en la circunferencia que corresponda a la energía que se le ha comunicado mediante las condiciones iniciales. Cada trayectoria fásica representa el pasado y el futuro dinámico del sistema, y el conjunto de trayectorias constituye el *diagrama fásico* del oscilador.

Para determinar el sentido de recorrido del punto P sobre la trayectoria fásica basta con escribir, de acuerdo con (15.20-21), que

$$\begin{aligned} q(t) &= a \operatorname{sen}(\omega_o t + \varphi) \\ \frac{\dot{q}}{\omega_o} &= a \cos(\omega_o t + \varphi) \end{aligned}$$

En la figura 15.9 se observa cuál es el ángulo $(\omega_o t + \varphi)$, y su crecimiento −al aumentar t− determina el movimiento de P según el sentido horario.[1]

1. El sentido horario de recorrido del punto P en este tipo de diagramas fásicos es general, pues si dq/dt es positiva significa que la coordenada q crece con el tiempo, y tal aumento se produce con la secuencia q: $-a \rightarrow 0 \rightarrow +a$, y a la inversa.

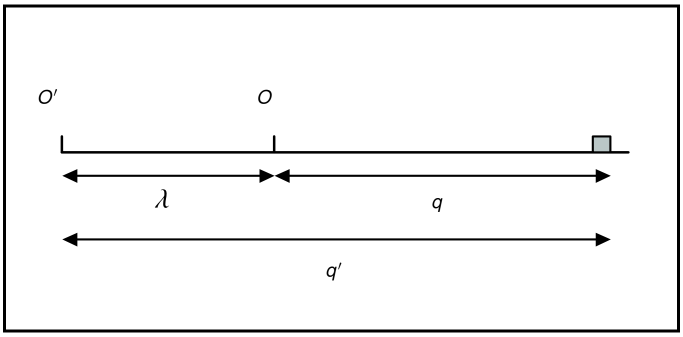


FIG. 15.10.

g) *Término constante*

Supongamos que la ecuación del oscilador libre sin amortiguamiento no viene dada por la ec. (15.17) sino que incluye un término constante que expresaremos como $k\lambda$,

$$m\ddot{q}' + kq' = \text{cte} = k\lambda \tag{15.27}$$

La ecuación anterior puede escribirse como

$$m\ddot{q}' + k(q' - \lambda) = 0 \tag{15.28}$$

Haciendo el cambio de variable

$$q = q' - \lambda \tag{15.29}$$

como $\ddot{q} = \ddot{q}'$, la ecuación del movimiento (15.28) toma la forma habitual

$$m\ddot{q} + kq = 0 \tag{15.17}$$

El cambio de q' a q según (15.29) supone medir los desplazamientos desde O en vez de desde O', esto es, un cambio de origen (fig. 15.10). Pero ¿por qué causa puede aparecer el término constante en (15.27)? Veámoslo. Si expresamos la ecuación del movimiento con la energía cinética

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T(\dot{q}')}{\partial \dot{q}'}\right] - \frac{\partial T(\dot{q}')}{\partial q'} = Q(q')$$

como $T = {}^{1}\!/_{2} m\dot{q}'^2$, llevándola a la expresión anterior y teniendo en cuenta (15.28) resulta que

$$m\ddot{q}' = Q(q') = -k(q' - \lambda) \tag{15.30}$$

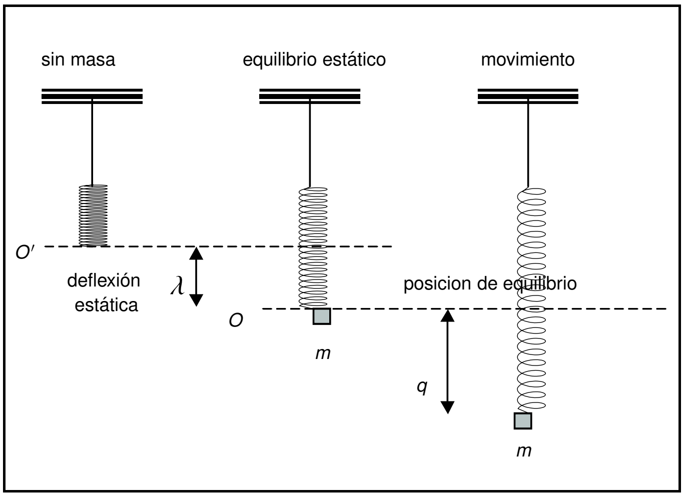


FIG. 15.11.

ecuación de la que se deduce que la fuerza generalizada Q no se anula en el origen O',

$$Q(q'=0) = k\lambda \neq 0$$

de modo que la presencia del término $k\lambda$ en (15.27) es debido a que el origen de la coordenada propia no se ha situado en la posición de equilibrio estable. En tal posición $Q(q')$ ha de ser nula

$$Q(q') = k(\lambda - q'_o) = 0$$

esto es,

$$q'_o = \lambda$$

y la posición de equilibrio corresponde al punto O, origen de la coordenada q (fig. 15.10). El que $q' = 0$ no corresponda con la posición de equilibrio puede ser debido a una mala elección del origen de la fuerza elástica o a la existencia de una fuerza constante $k\lambda$ superpuesta a la recuperadora

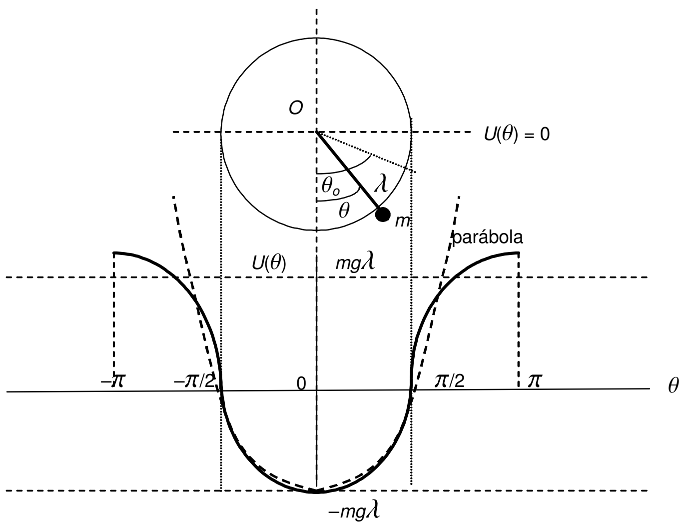
$$Q(q') = -k(q' - \lambda) = -kq' + k\lambda = Q_{\mathrm{rec}} + Q_{\mathrm{cte}}$$

En definitiva, el término constante en (15.27) surge de una errónea elección del origen, que no corresponde con la posición de equilibrio. Elegido éste correctamente, esto es, haciendo el cambio (15.29), se recupera la forma canónica de la ecuación del movimiento.

Además de la recuperadora, la presencia de una fuerza constante actuando sobre el oscilador es un caso frecuente, como ocurre, por ejemplo, en las oscilaciones verticales de un muelle (fig. 15.11). Al colgar la masa lentamente del muelle éste se estira hasta alcanzar una longitud que origina una fuerza recuperadora elástica que compensa el peso de la masa. Tal alargamiento del muelle se denomina *deflexión estática*. Las oscilaciones verticales que pueden inducirse en la masa vienen descritas por la ecuación del movimiento (15.17) siempre que se midan desplazamientos a partir de la posición de equilibrio *O*.

Ejemplo 15.1

Estúdiese el movimiento —en el plano vertical— de una masa puntual m unida a un extremo de una varilla de masa despreciable y de longitud λ; su otro extremo permanece fijo.



El sistema anterior constituye el denominado péndulo plano.
Su energía cinética es

$$T = {}^1\!/_2 m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = {}^1\!/_2 m\lambda^2\dot{\theta}^2$$

y su energía potencial, tomando como nivel cero el plano correspondiente al punto de suspensión,

$$U(\theta) = -mg\,\lambda\cos\theta$$

que es una función sinusoidal, y no parabólica como en el caso lineal (no obstante, si las amplitudes son pequeñas, $\cos\theta \approx 1 - {}^1\!/_2\theta^2$, con lo que $U(\theta) = -mg\,\lambda + {}^1\!/_2 mg\,\lambda\theta^2$ que sí es una parábola, de modo que, aproximadamente, el movimiento resultante es vibratorio armónico).

La fuerza generalizada relativa a la coordenada angular (que tomaremos como única coordenada propia pues el péndulo plano sólo tiene un grado de libertad)

$$Q_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mg\,\lambda\,\mathrm{sen}\,\theta = -mg\,\lambda\,[\theta - (\theta^3/3!) + (\theta^5/5!) - \cdots]$$

corresponde a un momento-fuerza y no es lineal.
Con la lagrangiana

$$L = T - U = {}^1\!/_2 m\,\lambda^2\dot{\theta}^2 + mg\,\lambda\cos\theta$$

la ecuación de Lagrange proporciona

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

siendo

$$\omega_o^2 = g/\lambda$$

De nuevo se observa que para ángulos suficientemente pequeños como para que sea admisible la aproximación del seno por el ángulo, la ecuación del movimiento es de la forma

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0$$

que corresponde a un movimiento vibratorio armónico.

El diagrama fásico puede obtenerse de una manera sencilla a partir de la energía total mecánica que −por ser el sistema conservativo− es constante, siendo su valor la energía que en el instante inicial se le comunique al péndulo, E_o,

$$E = T + U = {}^1\!/_2 m\,\lambda^2\dot{\theta}^2 - mg\,\lambda\cos\theta = \mathrm{cte} = E_o \qquad (1)$$

Despejando la velocidad angular

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{m\lambda^2}\,(E_o + mg\lambda\cos\theta)} \qquad (2)$$

consideremos las tres siguientes posibilidades en el valor de la energía.

- $E_o < mg\,\lambda$

Las trayectorias fásicas vienen dadas por (2). Las posiciones en que la velocidad es nula, y por tanto la energía cinética, corresponden a la amplitud del movimiento oscilatorio, θ_o; en ellas toda la energía es potencial

$$E_o = U\,(\theta_o) = -mg\,\lambda\cos\theta_o$$

y sustituyendo en (2)

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}(\cos\theta - \cos\theta_o)} \tag{3}$$

La amplitud es $\theta_o < \pi$, es decir, el péndulo no llega a alcanzar la rama superior de la vertical. Según se observa de la curva $U(\theta)$ el sistema está confinado en un pozo de potencial cuyos máximos están en $\pm\pi$. Como el potencial es simétrico las curvas son simétricas y cerradas.

Si θ_o es suficientemente pequeño como para que sea admisible la aproximación $\cos\theta_o = 1 - \frac{1}{2}\theta_o^2$, sustituyendo en la (3)

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}(\theta_o^2 - \theta^2)}$$

de modo que

$$\frac{\lambda}{g}\dot{\theta}^2 + \theta^2 = \theta_o^2 = \text{cte}$$

siendo las trayectorias fásicas elipses, resultado coherente con la circunstancia de que para esta aproximación, el movimiento es aproximadamente armónico.

De (3)

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\lambda}(\cos\theta - \cos\theta_o)}}$$

siendo el período del péndulo plano

$$\tau = 4\int_0^{\theta_0} dt$$

La integral anterior resulta ser integral elíptica de primera especie, que para amplitudes no muy grandes (para las que sea aceptable la aproximación del sen θ mediante los dos primeros términos del desarrollo en serie) da como resultado

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\left[1 + \frac{1}{16}\theta_o^2 + \frac{11}{3072}\theta_o^4\right]$$

El período depende, pues, de la amplitud, por lo que el péndulo plano es no isocrono, excepto para amplitudes suficientemente pequeñas como para que las potencias de θ_o sean despreciables frente a la unidad.

- $E_o = mg\lambda$

En los puntos de corte con la curva de energía potencial ocurre que

$$E_o = -mg\lambda\cos\theta_o = mg\lambda$$

y de este modo

$$\cos\theta_o = -1 \quad \text{y} \quad \theta_o = \pi$$

alcanzando el péndulo la posición vertical por encima del punto de suspensión, posición de equilibrio inestable. Según (3)

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}(\cos\theta + 1)}$$

o bien

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\cos(\theta/2) \tag{4}$$

pues $1+\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$. Resulta así que las trayectorias del espacio fásico son funciones coseno, existiendo dos ramas según el sentido del movimiento.

De (4) resulta que

$$dt = \frac{d\theta}{2\sqrt{\dfrac{g}{\lambda}}\cos(\theta/2)}$$

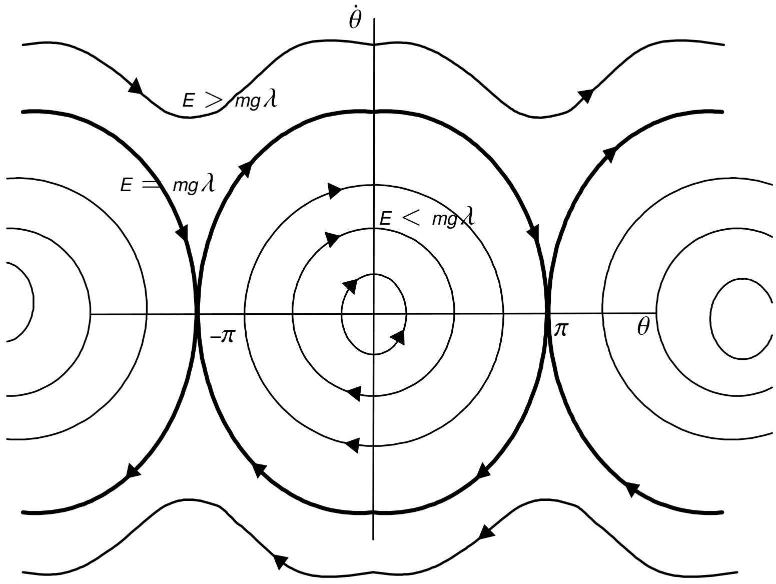
y el período es

$$\begin{aligned}\tau &= 4\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\cos(\theta/2)} = 4\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\int_0^{\pi}\frac{d\theta/2}{\cos(\theta/2)} = 4\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \\ &= 4\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)_0^{\pi/2} = 4\sqrt{\frac{\lambda}{g}}[\underbrace{\ln\operatorname{tg}{}^1\!/_2\pi}_{=\infty} - \ln\operatorname{tg}{}^1\!/_4\pi] = \infty\end{aligned}$$

Este caso, pues, no corresponde a un movimiento real; en él la partícula llegaría a la posición superior, $\theta = \pi$, con velocidad nula para lo cual tardaría un tiempo infinito.

- $E_o > mg\lambda$

Finalmente, para $E_o > mg\lambda$ el movimiento no es ya oscilatorio, si bien continúa siendo periódico. Corresponde al caso en el que el péndulo realiza revoluciones completas en torno a su punto de suspensión, no cumpliéndose que $E = U(\theta_o)$, pues en ninguna configuración la velocidad angular, ni por tanto la energía cinética, es nula, como se desprende de (2).



15.2. Oscilador libre con amortiguamiento viscoso

El oscilador libre, sin ningún tipo de fricción que reduzca su energía, es un modelo que puede ser útil como primera aproximación en algunos casos pero alejado del comportamiento real, pues es un hecho frecuentemente constatado que el oscilador libre cesa en su movimiento en un tiempo más o menos prolongado. Se hace preciso, pues, para dar cuenta de tal circunstancia, considerar fuerzas disipativas que expliquen la pérdida continua de energía del sistema oscilante. Los modelos de fuerza disipativa que mejor responden a la realidad son funciones de la velocidad, y de entre ellos, el que tiene un mayor campo de aplicabilidad y a la vez es sencillo desde el punto de vista matemático es el de la *fuerza disipativa viscosa*, proporcional a la velocidad. Tal modelo corresponde a una función de disipación de la forma

$$\Lambda(\dot{q}) = {}^1\!/\!_2\,\gamma\,\dot{q}^2 \tag{15.31}$$

con γ una constante de amortiguamiento, positiva. La fuerza generalizada disipativa es por tanto

$$Q_d = -\frac{\partial \Lambda(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = -\gamma\,\dot{q} \tag{15.32}$$

expresando el signo negativo la oposición de tal fuerza al movimiento del oscilador. La lagrangiana del oscilador lineal viene dada, al igual que antes, por

$$L(q,\dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q) = {}^1\!/_2 m\dot{q}^2 - {}^1\!/_2 kq^2 \tag{15.33}$$

y la ecuación del movimiento es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} = Q_d \tag{15.34}$$

es decir,

$$\boxed{m\ddot{q} + \gamma\dot{q} + kq = 0} \tag{15.35}$$

o bien

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_o^2 q = 0} \tag{15.36}$$

con el coeficiente de amortiguamiento β definido como

$$2\beta \equiv \frac{\gamma}{m} \tag{15.37}$$

(15.35) es la ecuación diferencial del movimiento del oscilador lineal libre amortiguado para *pequeñas* oscilaciones.

La ecuación característica de (15.36) es

$$r^2 + 2\beta r + \omega_o^2 = 0$$

siendo sus raíces

$$r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} \tag{15.38}$$

Símbolo

El símbolo que se utiliza para expresar un elemento disipativo viscoso es un cilindro con émbolo, como se muestra en la figura 15.12.

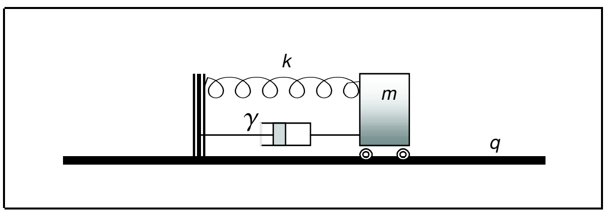


FIG. 15.12.

I. AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO Y MOVIMIENTO SOBREAMORTIGUADO

- Si $\beta = \omega_o$ se dice que existe **amortiguamiento crítico**.
  Al ser las dos raíces (15.38) iguales

$$r_{1,2} = -\beta$$

la solución es de la forma

$$q = A_1 e^{rt} + A_2 t e^{rt} = e^{-\beta t}\,(A_1 + A_2 t)$$

que tiende asintóticamente a cero cuando $t \to \infty$, cualesquiera que sean las condiciones iniciales. El amortiguamiento impide un movimiento oscilatorio (fig. 15.13).

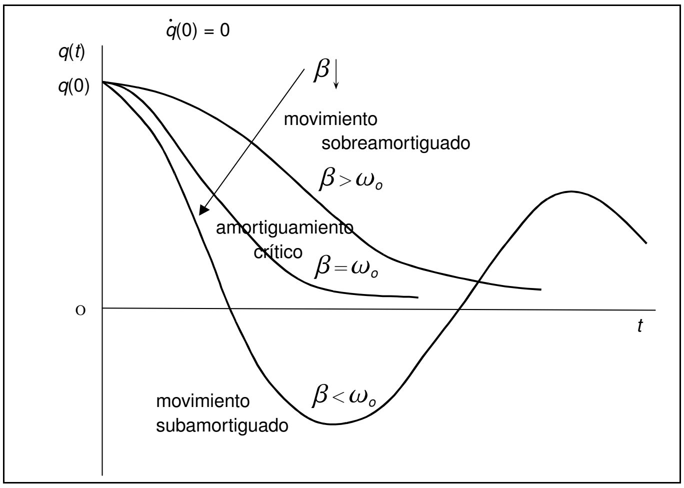


FIG. 15.13.

- Si $\beta > \omega_o$, el **movimiento** es **sobreamortiguado**.

$\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}$ es real y las raíces r_1 y r_2 son distintas y también negativas

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}$$

La solución, en este caso, es de la forma

$$q = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{t\sqrt{\beta^2-\omega_o^2}} + A_2 e^{-t\sqrt{\beta^2-\omega_o^2}}\right)$$

Como las exponenciales son reales pueden expresarse como funciones hiperbólicas seno o coseno, que no son funciones oscilantes. El desplazamiento también tiende a cero para $t \to \infty$, aunque más lentamente que en el caso anterior, no existiendo, tampoco, oscilaciones.

II. MOVIMIENTO SUBAMORTIGUADO

- Si $\beta < \omega_o$, el **movimiento** es **subamortiguado**.

$\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}$ es imaginaria y las raíces r_1 y r_2 son distintas. Escribamos, con $i = \sqrt{(-1)}$,

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} = i\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} = i\,\omega_a$$

Así

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\,\omega_a$$

con

$$\omega_a = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} \tag{15.39}$$

y la solución, en este caso, es de la forma

$$q = A_1\,e^{r_1 t} + A_2\,e^{r_2 t} = e^{-\beta t}\left(A_1\,e^{i\omega_a t} + A_2\,e^{-i\omega_a t}\right)$$

Al ser las exponenciales imaginarias pueden expresarse en función de funciones circulares seno o coseno, dando cuenta de un movimiento oscilante. Así, puede escribirse

$$q = a\,e^{-\beta t}\left\{\begin{smallmatrix}\text{sen}\\ \text{cos}\end{smallmatrix}\right\}(\omega_a t + \varphi) \tag{15.40}$$

a) *Determinación de las constantes*

Al igual que en el oscilador libre no amortiguado, las constantes a y φ se obtienen −en cada caso particular− mediante las condiciones iniciales $q(0)$ y $\dot{q}(0)$.

b) *Amplitud*

El valor máximo del desplazamiento a un lado y otro de la posición de equilibrio viene dado por la función $a\,e^{-\beta t}$, amplitud de la oscilación

$$A = a\,e^{-\beta t} \tag{15.41}$$

Al no ser la amplitud constante sino variable en el tiempo el movimiento *no es* vibratorio armónico.

c) *Amortiguamiento*

La amplitud es exponencialmente decreciente con el tiempo. En la gráfica 15.14 se observa que la variación temporal de la coordenada $q(t)$ está limitada por las exponenciales correspondiente al valor positivo y negativo de la amplitud. Así resulta que $q(t)$ tiende asintóticamente a cero, es decir, se anula después de un tiempo infinito, cuando en la realidad el tiempo que transcurre hasta que cesa el movimiento de un oscilador libre amortiguado del tipo considerado es más o menos prolongado, pero siempre finito. ¿Cómo se explica tal circunstancia? La razón es que el modelo de fuerza disipativa viscosa −función de disipación− utilizado describe muy bien el comportamiento de tales osciladores, pero no lo hace exactamente. Conseguir una descripción más exacta supone modificar −mejorar− el modelo pero a costa de aumentar la complejidad matemática, lo que habitualmente no está justificado.

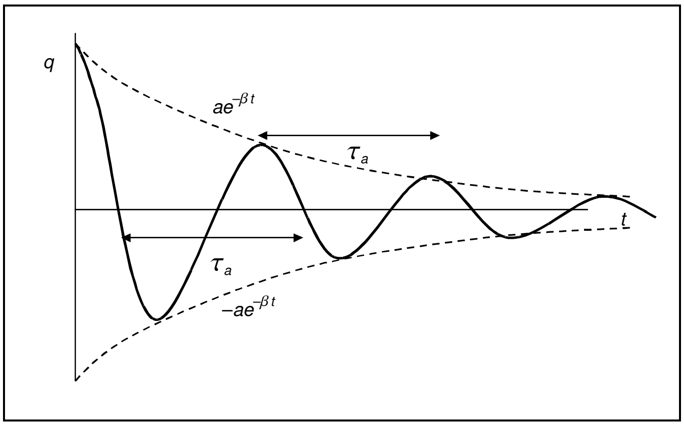


FIG. 15.14.

d) *Pseudoperíodo*

La pulsación del oscilador subamortiguado, ω_a, determina un período, τ_a, de valor $\tau_a = 2\pi/\omega_a$ que viene indicado en la figura 15.14. De la gráfica de variación temporal de la elongación (desplazamiento) q es claro que no se repiten nunca los máximos, de hecho no se reproduce el mismo estado de movimiento (si se repite la elongación no se repite la velocidad, o a la inversa). En consecuencia, aunque el movimiento es oscilatorio *no es periódico*. De ahí que a τ_a se le designe como pseudoperíodo.

f) *Disipación energética*

El que la amplitud sea decreciente da cuenta de la pérdida energética que sufre el oscilador como consecuencia del amortiguamiento. Se puede cuantificar tal pérdida del siguiente modo. La energía total del oscilador es

$$E = T + U = {}^1\!/\!_2 m\dot{q}^2 + {}^1\!/\!_2 kq^2$$

y su variación temporal

$$\frac{dE}{dt} = {}^1\!/\!_2 [2m\dot{q}\ddot{q} + 2kq\dot{q}] = \dot{q}\,(m\ddot{q} + kq) \tag{15.42}$$

y teniendo en cuenta la ecuación del movimiento (15.35), puede escribirse (15.42) como

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma \dot{q}^2 = -2\,\Lambda\,(\dot{q}) < 0 \tag{15.43}$$

expresión negativa, pues los factores γ y $\dot{q}^2$ son positivos.

La energía del oscilador amortiguado disminuye con el tiempo, siendo la potencia disipada proporcional al cuadrado de la velocidad, variando con ella.

La ec. (15.43) también permite interpretar la función de disipación en su relación con la potencia disipada.

g) *Decremento logarítmico*

Para caracterizar la cuantía del amortiguamiento se utilizan distintos parámetros, siendo uno de los más frecuentes el *decremento logarítmico*, que está relacionado con la disminución del valor máximo del desplazamiento, q_m, en la forma

$$\delta = \ln \frac{q_m(t)}{q_m\,(t+\tau_a)} \tag{15.44}$$

y como, según (15.41)

$$q_m(t) = a\,e^{-\beta t} \quad \text{y} \quad q_m\,(t+\tau_a) = a\,e^{-\beta(t+\tau a)}$$

resulta que

$$\boxed{\delta = \ln\, e^{\beta\tau_a} = \beta\tau_a} \tag{15.45}$$

variando el decremento logarítmico en razón directa con el grado de amortiguamiento.

Si se considera el cociente de dos elongaciones máximas no consecutivas, entre las que han transcurrido n oscilaciones, se tendrá que su cociente es

$$\frac{q_m(t)}{q_m\,(t+n\tau_a)} = e^{n\beta\tau_a}$$

con lo que

$$\ln \frac{q_m(t)}{q_m\,(t+n\tau_a)} = n\beta\,\tau_a = n\,\delta$$

y así

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{q_m(t)}{q_m(t + n\tau_a)} \tag{15.46}$$

relación que permite determinar el decremento logarítmico a partir de la medida de máximos no consecutivos con lo que puede mejorarse la exactitud de la determinación —sobre todo si se hacen las medidas sobre gráficas y los máximos consecutivos tienen valores muy próximos—.

Inversamente, si se conoce δ previamente se puede determinar —mediante (15.46)— el número de ciclos necesarios que han de transcurrir para que la elongación máxima se reduzca en un factor prefijado. Así, si se quiere determinar el número de oscilaciones, n', para que la amplitud se reduzca en el número e se tendrá que

$$\delta = \frac{1}{n'} \ln \frac{q_m(t)}{q_m(t + n'\tau_a)} = \frac{1}{n'} \ln e = \frac{1}{n'} \tag{15.47}$$

es decir, δ puede interpretarse como la inversa del número de oscilaciones que ha de realizar el sistema para que la elongación máxima se reduzca en un factor igual al número e. Cuanto mayor sea n' menor es el amortiguamiento del oscilador y menor es el decremento logarítmico.

h) *Tiempo de relajación*

Tiempo de relajación es el que ha de transcurrir para que la elongación máxima se reduzca en el número e.

Como, según (15.47), para que eso ocurra han de transcurrir n' oscilaciones de duración τ_a, el tiempo total, t_r, es

$$t_r = n'\tau_a = \frac{1}{\delta}\tau_a = \frac{1}{\beta} \tag{15.48}$$

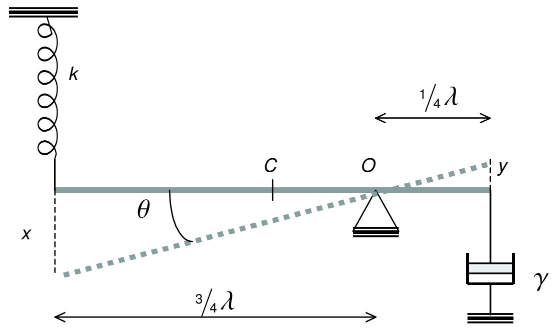
utilizando (15.45).[2]

Ejemplo 15.2

Una varilla homogénea de masa m y longitud λ puede rotar alrededor de un punto O fijo situado a $\lambda/4$ del extremo de la varilla unido a un amortiguador de constante

2. De un modo directo utilizando (15.41): en $t = 0$, $q_{mo} = a$; en $t = t_r$, por definición $q_{mr} = a e^{-\beta t r} = a e^{-1}$, de modo que $t_r = 1/\beta$.

γ, como se muestra en la figura. El otro extremo está sujeto a un muelle de constante elástica k. La posición horizontal de la varilla es la de equilibrio, y sólo puede moverse en el plano vertical. Considerando pequeñas oscilaciones, determine el cociente entre la frecuencia natural del sistema, ω_o y el parámetro de amortiguamiento β. Suponiendo que tal cociente es mayor que la unidad, caracterice el tipo de respuesta del oscilador.



El momento del peso respecto de O produce una deflexión estática en el muelle hasta llevarlo a la posición horizontal, que es la de equilibrio. Si se consideran desplazamientos respecto de dicha posición −como debe hacerse− el efecto del peso ha sido compensado y no hay ya que tenerlo en cuenta.

El sistema tiene un solo grado de libertad. Tomemos como coordenada generalizada el ángulo θ que forma la varilla con la línea horizontal en una posición cualquiera durante el movimento. La energía cinética viene dada por

$$T = {}^1\!/_2 I(o)\dot{\theta}^2$$

con

$$I(o) = I(c) + m\left({}^1\!/_4\lambda\right)^2 = \frac{7}{48} m\lambda^2$$

La energía potencial a considerar es sólo elástica, y para pequeños desplazamientos,

$$U = {}^1\!/_2 kx^2 \cong {}^1\!/_2 k\left({}^3\!/_4\lambda \operatorname{sen}\theta\right)^2 \cong {}^1\!/_2 \frac{9}{16} k\lambda^2\theta^2$$

La lagrangiana es, pues,

$$L = T - U = {}^1\!/_2 \frac{7}{48} m\lambda^2\dot{\theta}^2 - {}^1\!/_2 \frac{9}{16} k\lambda^2\theta^2$$

La fuerza disipativa es

$$Q_d = -\gamma\dot{y} \cong -\gamma\,{}^1\!/_4\lambda\dot{\theta}\cos\theta \cong -{}^1\!/_4\gamma\lambda\dot{\theta}$$

La ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_d$$

da como resultado

$$\ddot{\theta} + \frac{12\gamma}{7m\lambda}\dot{\theta} + \frac{27k}{7m}\theta = 0$$

o bien

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0$$

con

$$2\beta = \frac{12\gamma}{7m\lambda} \quad \text{y} \quad \omega_o^2 = \frac{27k}{7m}$$

Así pues

$$\frac{\omega_o}{\beta} = \frac{\lambda}{2\gamma}\sqrt{7k}$$

Si tal cociente es mayor que uno, entonces $\beta < \omega_o$ y el movimiento del sistema es oscilatorio subamortiguado, de pseudoperíodo

$$\tau_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{14\pi m\lambda}{3\sqrt{21mk\lambda - 4\gamma^2}}$$

El decremento logarítmico es

$$\delta = \beta\tau_a = \frac{6\gamma}{7m\lambda}\frac{14\pi m\lambda}{3\sqrt{21mk\lambda - 4\gamma^2}} = \frac{4\pi\gamma}{\sqrt{21mk\lambda - 4\gamma^2}}$$

y el tiempo de relajación,

$$t_r = \beta^{-1} = \frac{7m\lambda}{6\gamma}$$

15.3. **Oscilador libre con amortiguamiento de Coulomb**

Consideremos ahora al oscilador sometido a una *fuerza disipativa constante*, independiente de la velocidad y de la posición, como es el caso de la fuerza de rozamiento que surge al deslizar un cuerpo sobre una superficie seca. Es el *amortiguamiento* *de Coulomb*. Tal modelo de fuerza disipativa corresponde a una función de disipación proporcional a la velocidad (y no a su cuadrado, como en el amortiguamiento viscoso)

$$\Lambda(\dot{q}) = \gamma\dot{q} \tag{15.49}$$

con γ una constante de amortiguamiento, positiva. La fuerza generalizada disipativa es, por tanto,

$$Q_d = -\frac{\partial\Lambda(\dot{q})}{\partial\dot{q}} = -\gamma \tag{15.50}$$

expresando el signo negativo la oposición de tal fuerza al movimiento del oscilador. La lagrangiana viene dada, al igual que antes, por

$$L(q,\dot{q}) = T - U = {}^1\!/\!_2 m\dot{q}^2 - {}^1\!/\!_2 kq^2 \tag{15.51}$$

y la ecuación del movimiento es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}}\right) - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} = Q_d$$

es decir,

$$m\ddot{q} + kq = Q_d = -\gamma \tag{15.52}$$

Al no figurar $\dot{q}$ en (15.52) −al contrario de lo que ocurre en (15.35)− el sentido del movimiento, esto es, de la velocidad, no se refleja directamente en la ecuación dinámica, lo que exige considerar las dos posibilidades independientemente. La figura 15.15 ilustra esta circunstancia para el caso de un desplazamiento lineal −designado

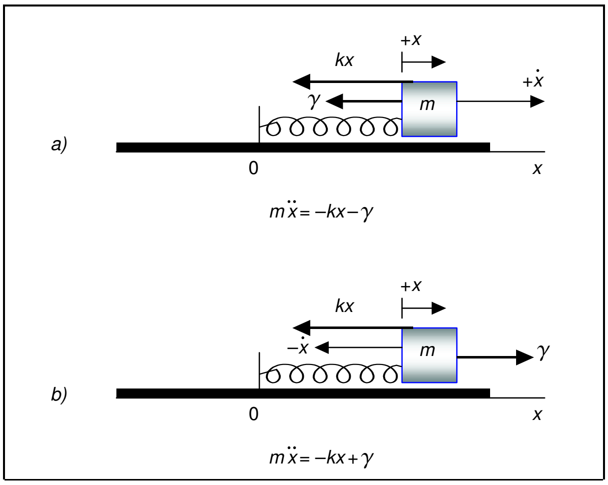


FIG. 15.15.

por $x-$ positivo, en cuyo caso, si la velocidad es positiva las fuerzas recuperadora y disipativa se refuerzan, mientras que si la velocidad es negativa ambas fuerzas se contrarrestan.

Así, si $\dot{q}$ es positiva, como la fuerza disipativa se opone al movimiento, la ecuación dinámica es

$$m\ddot{q} + kq = -\gamma \tag{15.53}$$

o bien

$$\ddot{q} + \omega_o^2 q = -\frac{\gamma}{m}, \qquad \dot{q} > 0 \tag{15.54}$$

con $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la frecuencia natural del oscilador. La ec. (15.54) es válida siempre que se cumpla que $\dot{q}$ es positiva, es decir, para todo el semiciclo en el que $\dot{q} > 0$ tanto si q es positiva como negativa.

La solución de (15.54) es de la forma

$$q_1 = q_h + q_p = a_1 \cos(\omega_o t + \varphi_1) - \frac{\gamma}{k}, \qquad \dot{q} > 0 \tag{15.55}$$

válida para todo el semiciclo de velocidad positiva.

Para el medio ciclo en el que la velocidad es negativa, la ecuación del movimiento es

$$\ddot{q} + \omega_o^2 q = \frac{\gamma}{m}, \qquad \dot{q} < 0 \tag{15.56}$$

siendo su solución

$$q_2 = a_2 \cos(\omega_o t + \varphi_2) + \frac{\gamma}{k}, \qquad \dot{q} < 0 \tag{15.57}$$

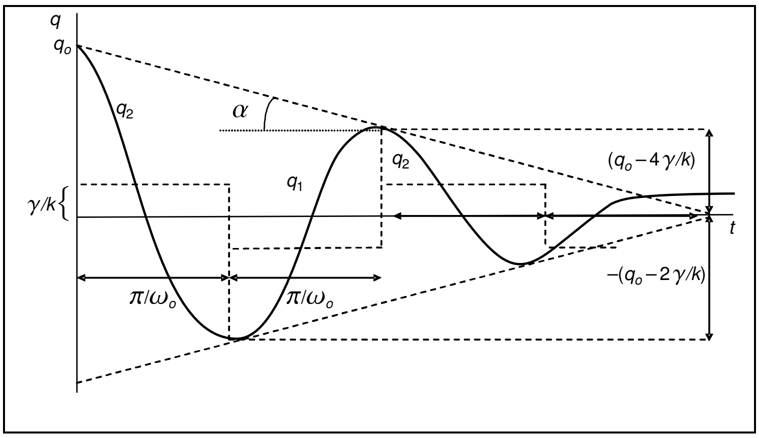


FIG. 15.16.

Los términos $\pm\gamma/k$ que aparecen en (15.55 y 15.57) corresponden al alargamiento que originaría la fuerza de rozamiento sobre el muelle si actuase estáticamente como fuerza activa. En cualquier caso, la acción de tal fuerza constante origina un cambio en la localización de la posición de equilibrio (como se vio en 15.1g) en la cuantía γ/k (fig. 15.16).
Para mejor analizar el movimiento, tomemos como condiciones iniciales

$$q\,(t=0) \;=\; q_o \tag{15.58}$$

$$\dot{q}\,(t=0) \;=\; 0 \tag{15.59}$$

es decir, se separa al cuerpo de su posición de equilibrio y se le deja libre sin velocidad inicial. Como el desplazamiento se ha tomado como positivo, el sistema al moverse hacia su posición de equilibrio lo hace con velocidad negativa ($\dot{q} < 0$) y la solución a considerar es (15.57)

$$q_2 = a_2 \cos\left(\omega_o t + \varphi_2\right) + \frac{\gamma}{k}$$

Derivándola respecto del tiempo resulta

$$\dot{q}_2 = -a_2\,\omega_o \,\mathrm{sen}\left(\omega_o t + \varphi_2\right) \tag{15.60}$$

y utilizando las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} q_o \;&=\; a_2 \cos\varphi_2 + \frac{\gamma}{k} \\ 0 \;&=\; -a_2\,\omega_o \,\mathrm{sen}\,\varphi_2 \end{aligned}$$

resulta

$$\varphi_2 = 0$$

y

$$a_2 = q_o - \frac{\gamma}{k}$$

con lo que

$$q_2 = \left(q_o - \frac{\gamma}{k}\right)\cos\omega_o t + \frac{\gamma}{k} \tag{15.61}$$

y

$$\dot{q}_2 = -\left(q_o - \frac{\gamma}{k}\right)\omega_o \,\mathrm{sen}\,\omega_o t \tag{15.62}$$

expresiones válidas para el semiciclo que corresponde —si la coordenada es lineal— al movimiento de derecha a izquierda, y cuya duración es desde el inicio hasta que la velocidad se anula ($\dot{q}_2 = 0$), es decir, $t = \pi/\omega_O$. El desplazamiento −en este instante de tiempo− viene dado por, (fig. 15.16),

$$q_2\,(t = \pi/\omega_O) = -\left(q_o - \frac{\gamma}{k}\right) + \frac{\gamma}{k} = -\left(q_o - 2\frac{\gamma}{k}\right) \tag{15.63}$$

Para el siguiente semiciclo, $\dot{q}_2 > 0$, y la solución es (15.55)

$$q_1 = a_1 \cos\left(\omega_o t' + \varphi_1\right) - \frac{\gamma}{k}$$

Su derivada respecto del tiempo proporciona

$$\dot{q}_1 = -a_1\,\omega_o \operatorname{sen}\left(\omega_o t' + \varphi_1\right) \tag{15.64}$$

Las condiciones iniciales para este segundo semiciclo son

$$\begin{aligned} q_1\,(t' = 0) \;&=\; q_2\,(t = \pi/\omega_O) = -\left(q_o - 2\frac{\gamma}{k}\right) \\ \dot{q}_1\,(t' = 0) \;&=\; \dot{q}_2\,(t = \pi/\omega_O) = 0 \end{aligned}$$

y llevándolas a (15.55 y 15.64) se obtiene

$$\varphi_1 = 0$$

y

$$a_1 = -\left(q_o - 3\frac{\gamma}{k}\right)$$

con lo que

$$q_1 = -\left(q_o - 3\frac{\gamma}{k}\right)\cos\omega_o t' - \frac{\gamma}{k} \tag{15.65}$$

y

$$\dot{q}_1 = \left(q_o - 3\frac{\gamma}{k}\right)\omega_o \operatorname{sen}\omega_o t' \tag{15.66}$$

El segundo medio ciclo finaliza cuando $\dot{q}_1$ vuelve a ser cero, esto es, en $t' = \pi/\omega_O$; en este instante el desplazamiento vale

$$q_1\,(t' = \pi/\omega_O) = \left(q_o - 3\frac{\gamma}{k}\right) - \frac{\gamma}{k} = \left(q_o - 4\frac{\gamma}{k}\right) \tag{15.67}$$

iniciándose −de nuevo− el proceso.

a) *Oscilaciones lineales y angulares*

Si la coordenada propia es lineal la fuerza disipativa constante corresponde a la fuerza de rozamiento

$$\gamma = \mu N$$

siendo μ el coeficiente de rozamiento y N la fuerza normal a las superficies en el punto de contacto.

Si la coordenada propia es angular la fuerza generalizada disipativa corresponde al momento de fricción −constante− M_r

$$\gamma = M_r$$

b) *Frecuencia de las oscilaciones*

La frecuencia de las oscilaciones es la natural del oscilador, ω_o, a diferencia de lo que ocurre con el amortiguamiento viscoso. El amortiguamiento de Coulomb, pues, no modifica la frecuencia de vibración del sistema.

c) *Amplitud*

Como la amplitud se reduce en cada ciclo en $4\gamma/k$, siendo el tiempo transcurrido el período $2\pi/\omega_o$, los máximos de las oscilaciones están limitados por la recta de pendiente

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4\gamma/k}{2\pi/\omega_o} = \frac{2\gamma\omega_o}{\pi k}$$

y su simétrica respecto del eje de tiempos (fig. 15.16).

d) *Cese del movimiento*

El movimiento cesa cuando, en algún estado de velocidad nula, la fuerza recuperadora es igual o menor que la de fricción, $kq \leq \gamma$, es decir,

$$q \leq \gamma/k$$

Por tanto, el número de semiciclos, n, que transcurren hasta que cesa el movimiento viene determinado por la relación

$$\left(q_o - n2\frac{\gamma}{k}\right) \leq \gamma/k$$

de donde

$$n \geq \frac{q_o - \gamma/k}{2\gamma/k} \tag{15.68}$$

Al contrario, pues, de lo que −según el modelo utilizado− ocurre en el amortiguamiento viscoso, en el amortiguamiento de Coulomb el movimiento cesa después de transcurrido un tiempo finito.

Referencias

Darwin, H. W. (1976): *Phenoménes de vibration et de propagation*, Eyrolles, París.

Finzi, B. (1976): *Mecánica racional*, Urmo, Bilbao.

Lalanne, M., Berthier, P. y Der Hagopian, J. (1984): *Mechanical Vibrations for Engineers*, John Wiley & Sons, Nueva York.

Marion, J. B. (1995): *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*, Reverté, Barcelona.

Pain, H. J. (1995): *The Physics of Vibrations and Waves*, John Wiley & Sons, Chichester, England.

Piskunov, N. (1973): *Cálculo diferencial e integral*, Montaner y Simón, S.A., Barcelona.

Rao, S. S. (1990): *Mechanical Vibrations*, Addison Wesley, Nueva York.

Symon, K. R. (1968): *Mecánica*, Aguilar, Madrid.

Thomson, W. T. (1982): *Teoría de vibraciones*, Prentice-Hall, México.