NOTAS, REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS, PISTAS Y ALGUNAS RESPUESTAS

GERTRUDE STEIN: ¡La respuesta! ¡La respuesta!
INTERLOCUTOR: ¿Cuál es la respuesta?
GERTRUDE STEIN *(sonriendo)*: Ah, ¿cuál es la pregunta?

Últimas palabras de Gertrude Stein

1. UN APERITIVO LÓGICO

Lógica formal: Introducción al lenguaje de la lógica (pág. 17)

La cita del comienzo es de *Miscellany* (Cambridge University Press, 1986) de Littlewood, una colección de recuerdos y anécdotas matemáticas. J. E. Littlewood y G. H. Hardy fueron una de las parejas de colaboradores matemáticos más fructíferas de todos los tiempos. Más adelante citaremos algunos de los bastante más oscuros recuerdos del propio Hardy.

El concepto genérico de relación (entre cosas en general, no ya relaciones de parentesco) resultaba bastante confuso para los filósofos y lógicos anteriores al siglo XX. Hume distinguía entre las relaciones «naturales» o «de sentido común» y las «filosóficas». Ernest Harrison está en relación natural «x estudió en y» con la Universidad de Oxford, pero no tiene relación natural alguna con Madonna. Sin embargo, Ernest Harrison sí está en multitud de relaciones filosóficas (o artificiales) con Madonna, como en «x vivió en el mismo siglo que y».

Lo que resultaba especialmente sorprendente era la cuestión de si un objeto podía estar en relación consigo mismo. Hubo algunos lógicos eminentes, como el inglés F. H. Bradley, que negaron tal posibilidad («Toda la clave de una relación», decían, «está en relacionar *una* cosa con *otra*»). Era este punto de vista el que adoptaba Ernest Harrison al negar que estuviera relacionado consigo mismo. Es un punto de vista que está abocado a generar problemas. La identidad ($x = x$) no se puede considerar entonces una relación, ni se puede considerar el suicidio como una caso particular de matar («x mata a x»).

Bertrand Russell, el mayor lógico que haya jamás producido Inglaterra, repudió esta forma de verlas y reformuló la lógica para permitir que las relaciones —en la forma general *Rxy*— incluyeran el caso particular *Rxx*.

Pregunta 1. Yo soy el padre de ese hombre.

En la Lógica Formal de este capítulo 1 volvemos a plantear los retos y los resolvemos uno a uno. En el resto del libro no volveremos sobre los retos, sino que daremos respuestas sólo a las demás cuestiones que vayamos planteando.

RETO 1. INTERPRETACIONES Y EJEMPLOS. Escriba frases en castellano que expresen el significado de estas fórmulas.

1. Fc Tom Tymoczko es del sexo femenino.
2. Mea Adrienne Rich está casada con Jim Henle.
3. $d = e$ Aristóteles es Adrienne Rich.
4. $Racb$ Jim Henle y Tom Tymoczko engendran a Madonna.
5. $Rcab$ Tom Tymoczko y Jim Henle engendran a Madonna (la lógica no sabe que el orden de los progenitores es irrelevante).
6. $Rabc$ Jim Henle y Madonna engendran a Tom Tymoczko.
7. $y = b$ y es (idéntico a) Madonna.
8. Fa & Ga Jim Henle es del sexo femenino y Jim Henle es del sexo masculino.
9. Mxb x está casado con Madonna.
10. $\neg Fx$ x no es del sexo femenino.
    Fx & Gx x es del sexo femenino y x es del sexo masculino. •

RETO 2. TRADUCCIÓN Y ANÁLISIS LÓGICO. Utilizando sólo los símbolos que se han presentado, escriba fórmulas que expresen el significado de estas frases.

1. Madonna está casada con Aristóteles. Mbd
2. Aristóteles es del sexo masculino. Gd
3. Aristóteles está casado con Madonna. Mdb
4. x es hijo de Aristóteles y Tom Tymoczko. $Rdcx$
5. Jim Henle es Madonna. $a = b$
6. Madonna es ella misma. $b = b$ (!)
7. Adrienne Rich no es ella misma. $\neg(e = e)$, o, como se escribe a veces, $e \neq e$
8. Aristóteles y Jim Henle engendran a Adrienne Rich. $Rdae$
9. Jim Henle es del sexo masculino y Tom Tymoczko del sexo femenino. Ga & Fc
10. Tom Tymoczko no está casado con Jim Henle. $\neg Mca$ •

Pregunta 2. «Jim Henle» es un nombre inglés que se refiere al ser humano Jim Henle. Jim Henle es un ser humano que vive en Massachusetts y que, intrínsecamente, no se refiere a ninguna otra cosa.

Pregunta 3. La expresión «Santa Claus» parece un nombre y funciona como un nombre, de acuerdo a las reglas del lenguaje. Ésta es una buena razón para representarla en lógica por un nombre. Por otra parte, ¡«Santa Claus» no se refiere a nada! No existe Santa Claus. Si uno busca en todo el universo no encontrará a nadie que se llame «Santa Claus» (aunque se encontrará muchas «postales de Santa Claus», «historias de Santa Claus» y «Santa Clauses de grandes almacenes»). Ésta es una buena razón para afirmar que «Santa Claus» no debe representarse en lógica por un nombre o constante.

RETO 3. Escriba las fórmulas que se leen o pronuncian como sigue.

1. Tanto Fx como Bx. $Fx \mathbin{\&} Bx$
2. Hay algún G. $\exists zGz$ (o $\exists xGx$ o $\exists yGy$, y así sucesivamente)
3. No es el caso que Fd o Fe. $\neg(Fd \vee Fe)$
4. Bien no F de d o F de d. $(\neg Fd \vee Fd)$
5. F de x y dicha x satisface la relación M con a. $Fx \mathbin{\&} Mxa$
6. Hay algo tal que b satisface la relación M con ella y además tal cosa es G. $\exists y(Mby \mathbin{\&} Gy)$ o $\exists x(Mbx \mathbin{\&} Gx)$ y así sucesivamente
7. Todo es bien F o no F. $\forall x(Fx \vee \neg Fx)$ o $\forall w(Fw \vee \neg Fw)$ y así sucesivamente
8. Bien todo es F o todo no es F. $\forall xFx \vee \forall x\neg Fx$ o $\forall wFw \vee \forall w\neg Fw$ y así sucesivamente
9. Si no F de a, entonces G de a. $\neg Fa \Rightarrow Ga$
10. No es el caso que si F de a, entonces G de a. $\neg(Fa \Rightarrow Ga)$
11. Tanto R de x, y, z como bien M de x, y o no M de x, y. $Rxyz \mathbin{\&} (Mxy \vee \neg Mxy)$

Nota: De momento no hemos establecido reglas para el uso de los paréntesis. Estos retos pretenden sugerir la importancia de tener tales reglas. •

RETO 4. Escriba las fórmulas que expresan el significado de estas afirmaciones (independientemente de cómo se lean).

1. Jim Henle está casado con Aristóteles y Aristóteles es del sexo masculino. $Mad \mathbin{\&} Gd$
2. Hay alguien con quien Jim Henle está casado y que es del sexo masculino $\exists x(Max \mathbin{\&} Gx)$
3. Hay alguien con quien Jim Henle está casado y alguien es del sexo masculino. $\exists xMax \mathbin{\&} \exists xGx$
4. Madonna tiene marido. $\exists z(Mbz \mathbin{\&} Gz)$, o cualesquiera otras variables, x, y, en lugar de z
5. Tom Tymoczko es un marido. $\exists x(Mcx \mathbin{\&} Gc)$ o $\exists xMcx \mathbin{\&} Gc$
6. y tiene marido. $\exists z(Myz \mathbin{\&} Gz)$, o cualesquiera otras variables, x, w, en lugar de z (¡pero no y!)
7. Hay alguien con quien Adrienne Rich está casada. $\exists xMex$
8. Adrienne Rich y Madonna engendran a Jim Henle. $Reba$
9. Hay algún y tal que Adrienne Rich e y engendran a Jim Henle. $\exists yReya$
10. Adrienne Rich es progenitor de Jim Henle. $\exists yReya$
11. Adrienne Rich es padre de Jim Henle. $\exists y(Reya \mathbin{\&} Ge)$ •

RETO 5. Escriba frases que expresen el significado de estas fórmulas.

1. $\exists xMcx$ Tom Tymoczko está casado (existe alguién con quien Tom Tymoczko está casado).
2. $\exists yMcy$ Igual que 1.
3. $\neg\forall zMza$ No todo el mundo está casado con Jim Henle.
4. $\forall x(Fx \vee \neg Fx)$ Cada uno o es del sexo femenino o no lo es (para todo individuo, o es del sexo femenino o no lo es).
5. $\forall xFx \vee \neg\forall xFx$ Todos son del sexo femenino o no todos son del sexo femenino.
6. $\forall z(Fz \Leftrightarrow \neg Gz)$ Cada uno es del sexo femenino sii no es del sexo masculino.
7. $\exists y(Rayc \;\&\; Gc)$ Tom Tymoczko es hijo de Jim Henle. Hay alguien que junto con Jim Henle engendran a Tom Tymoczko y Tom T. es del sexo masculino.
8. $\exists y(Rayc \;\&\; Ga)$ Jim Henle es padre de Tom Tymoczko. Hay alguien que junto con Jim Henle engendran a Tom Tymoczko y Jim H. es del sexo masculino.
9. $\forall x(Mxa \Rightarrow Max)$ Quien esté casado con Jim Henle es tal que Jim Henle está casado con él/ella. Para cualquier persona, si está casada con Jim Henle, entonces Jim Henle está casado con ella. Esto resulta trivial en el caso del matrimonio, pero absolutamente falso para los padres u otras relaciones.
10. $\neg\exists z(Mza \;\&\; \neg Maz)$ No hay quien esté casado con Jim Henle pero (y) Jim Henle no esté casado con él/ella.
11. $\exists z\neg Mza$ Alguien no está casado con Jim Henle.
12. $\exists x\exists y\neg Mxy$ Alguien no está casado con alguien. Hay personas, sean x e y, tales que x no está casada con y.
13. $\forall x\forall y(Mxy \Rightarrow \neg(x = y))$ Nadie está casado consigo mismo. Para cualquier pareja de casados, ninguno es igual al otro. Para cualesquiera personas x e y, si x está casada con y entonces x no es (idéntica a) y. •

RETO 6. Con nuestro vocabulario mínimo se pueden definir una parte considerable de los términos de parentesco. Algunas de las excepciones se deben a la inclusión del tiempo, como en «hijastro» o «ex esposa», pero tal vez éstos no sean términos de parentesco. Resultan más interesantes los términos que clasifican las relaciones por el orden de nacimiento. Los chinos de la provincia de Fukien, por ejemplo, en lugar del genérico «hermana», tienen términos como a-tze, que significa «la mayor (o primera) hermana». Para poder expresar la relación «x es una a-tze de y» necesitaríamos un predicado adicional Oxy para expresar «x es mayor que y» (¡y cierta curiosa pasamanería lógica para expresar que ninguna otra hermana de y es mayor que x!). Con esto podríamos definir la hermana mayor, la segunda hermana, etc.

Otra dificultad de nuestro lenguaje la plantean algunos idiomas americanos nativos, como el sioux. Estos idiomas tienen términos de parentesco que no sólo varían con el género de la persona a la que se refieren (como «hermana» y «hermano»), sino también ¡con el género del que habla! De manera que un niño sioux, pero no una niña sioux, podría llamar tibola a su hermano mayor. •

Cerca y Acerca de la lógica

PARADOJA (PÁG. 25)

La paradoja de Aquiles y la Tortuga es una de las cuatro paradojas del movimiento que escribió Zenón de Elea, que vivió en el siglo V a. C. Hay bastante misterio en torno a Zenón y sus paradojas; nuestras mismas fuentes sobre él son escasas. Se cree que componía las paradojas en apoyo a Parménides en su teoría de que todas las cosas eran una sola e inmóvil.

Independientemente de su propósito, las cuestiones que planteaba han mantenido a filósofos y matemáticos ocupados desde entonces. En los últimos 2.000 años ha habido momentos en que parecían triviales y fáciles de resolver; en otros momentos se han considerado desconcertantes. A principios del siglo XX, por ejemplo, Bertrand Russell opinaba que habían sido completamente desmitificadas. Hoy día, sin embargo, estamos de nuevo desconcertados. Véase *Zeno's Paradoxes*, editada por Wesley C. Salmon (Bobbs-Merrill, 1970), una buena introdución al tema y unos cuantos ensayos provocativos.

La paradoja del barbero se debe a Bertrand Russell.

La paradoja de los cretenses se debe a Epiménides. Curiosamente, se la alude en la Biblia (Tito 1:12). En una carta a Tito, Pablo habla de los cretenses cuando dice: «Dijo uno de ellos mismos, un profeta entre los suyos, que los cretenses son siempre embusteros, bestias de maldad, panzas holgazanas.» Aparentemente, Pablo no se dió cuenta de que Epiménides estaba formulando una paradoja lógica, ¡no confesando la general depravación de los cretenses!

En todas estas paradojas, la auto-referencia es un tema sospechosamente recurrente (ver «El título de la sección autoreferenciándose» en el capítulo 2). Recomendamos un pequeño volumen espléndido, *Vicious Circles and Infinity, An Anthology of Paradoxes*, editado por Patrick Hughes y George Bretch (Doubleday, 1975).

Una solución alternativa de las paradojas de mentirosos es admitir que «es verdad» no está completamente definido o no es definible; es decir, que hay enunciados cuya verdad no se puede determinar. De todas formas, ¿qué es la verdad?

Lógica informal

NEGACIÓN (PÁG. 29)

Richard Wilbur, antes poeta laureado de los Estados Unidos, escribió un libro titulado *Opposites* (Harcourt Brace Jovanovich, 1973), en el que exploraba el tema de los opuestos. Nuestro versículo favorito es del poema 14:

> ¿Cuál es de penique el opuesto?
> Lo siento, pero no hay respuesta a esto.
> A menos que la calderilla contemos
> de quienes ni un penique tenemos.[1]

1. En inglés, el adjetivo *pennyless* se aplica a quien no tiene dinero, es decir, ni un penique *(penny)*. Así, el poema original parece sugerir ambas palabras como opuestos. *N. del t.*

EJERCICIO

1. Jim Henle no está calvo.
3. Tom no está clavo o Jim no está calvo (o Tom o Jim no están calvos).
5. Tom y Jim no son estrellas de rock. *O bien*, ni Tom ni Jim son estrellas de rock.
7. Dick no está casado o Jane no está casada.
9. Al menos un molusco no es del sexo femenino.
11. Al menos un graduado en geología es anfibio.
13. Hay alguien a quien Jean no puede superar.
15. Hay algún estudiante de la facultad de quien Sue no es amiga.
17. Ningún estudiante de la facultad es amigo de todos en la universidad. *O bien*, cualquier estudiante no es amigo de alguno de la universidad.

Curiosidades y rompecabezas

TEST (PÁG. 30)

1. V o F   2. F   3. V

Las preguntas están dispuestas de tal forma que no hay más remedio que contestar *V* a la tercera para poder responder correctamente a la 2. Si se responde *V* a 2 y *F* a 3, entonces la respuesta a 2 es incorrecta, puesto que 2 dice que las respuestas a 2 y 3 son la misma, se responde *V* pero de hecho las respuestas son diferentes (*V* y *F*). Si se responde *F* a 2 y a 3, entonces la respuesta a 2 es incorrecta de nuevo, puesto que 2 dice que las respuestas a 2 y 3 son la misma, se responde *F* pero de hecho las respuestas son iguales (*F* y *F*).

Así pues, no hay más remedio que responder *V* a 3. Una vez hecho esto, para 2 se puede elegir tanto *V* como *F*. Pero por otra parte, si se responde *V* a 2, entonces no hay solución para 1. Si se responde *F* a 2, entonces para 1 se puede elegir tanto *V* como *F*, cualquiera es correcta.

La fantástica aventura de Tom y Jim

(continuación de la página 476)

14 de noviembre

Antes de atacar los problemas filosóficos, Jim se plantea uno matemático. Hoy el hombre del tiempo ha dicho: «Hay una probabilidad del 50 % de que llueva mañana.» A Jim siempre le ha preocupado qué significa esto, y quiere comprobarlo viajando un día hacia el futuro para ver si llueve, regresando, volviendo de nuevo al futuro, regresando, y así una y otra vez. Quiere ver si ocurre que alrededor del 50 % de las veces llueve y el otro 50 % no llueve.

Tom piensa que hacer eso es derrochar las posibilidades de la Infundíbula. Si está usted de acuerdo con Tom, vaya a la página 584. Si está de acuerdo con Jim, vaya a la 540.

2. TODO DE UNA VEZ: EL QUE AVISA NO ES TRAIDOR

Lógica formal: Panorámica

VERDAD Y FALSEDAD (PÁG. 33)

PREGUNTA 1. a. Verdadera c. Falsa

RETO 1

1.

A B	$\neg$**A** $\vee$ **B**
V V	F V
V F	F F
F V	V V
F F	V V

si

3.

A B	$\neg$(**A** & $\neg$**B**)
V V	V F F
V F	F V V
F V	V F F
F F	V F V

$A \Rightarrow B$

RETO 2. 1. F 3. F 5. V 7. V 9. F 11. V ($\forall x Sx$ es falsa, y F $\Rightarrow$ F es verdadera) 13. V 15. F 17. V 19. F (los profesores podrían no tener profesores).

RETO 3. 1. F 3. V 5. V 7. V 9. V porque Sc es F 11. V 13. V 15. F 17. V 19. F (¿qué pasa si x es 0?) •

LA ESTRUCTURA LÓGICA: LA CLAVE DE LA LÓGICA (PÁG. 38)

RETO 1

2. Un ejemplo para cada una:
   a. O no traigo el paraguas o hace sol
   b. Voy a seguir el rastro, y si tengo suerte, esta noche cenamos carne.
   c. Hay un Dios

•

RETO 2. Respuestas posibles: $A \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow A$, $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$, $\exists x Ax \Leftrightarrow \exists y Ay$ •

RETO 4. Respuestas posibles: $A \mathbin{\&} \neg A$, $A \mathbin{\&} (A \Rightarrow \neg A)$, $\exists x Ax \mathbin{\&} \forall x \neg Ax$ •

RETO 5. Respuestas posibles: $A \mathbin{\&} B$ y $B \mathbin{\&} A$, $A \vee B$ y $B \vee A$, $A \Rightarrow B$ y $\neg A \vee B$, A y A •

RETO 6. Respuestas posibles: A implica $A \vee B$, $A \Leftrightarrow B$ implica $A \Rightarrow B$, B implica $\neg A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ implica $\neg A \vee B$ •

La cita de Frege es de *Foundations of Arithmetic* (Blackwell, 1950).

LAS ESTRUCTURAS ARGUMENTALES: LA CLAVE DEL RAZONAMIENTO (PÁG. 42)

RETO 1

Todos los presidentes de los Estados Unidos son hombres
Tom Tymoczko es un hombre
$\therefore$ Tom es un presidente de los Estados Unidos

Ninguna mujer es presidente de los Estados Unidos
Jim Henle no es presidente de los Estados Unidos
$\therefore$ Jim Henle es una mujer

•

RETO 2. 1. válida 3. válida 5. válida 7. inválida (piense en Fx, «x está todo blanco», y Gx, «x está todo negro»). •

Cerca y Acerca de la lógica

UNA PARADOJA Y W. S. GILBERT (PÁG. 45)

Vea *The Complete Plays of Gilbert and Sullivan* de W. S. Gilbert (Norton, 1976). Otro trabajo interesante de Gilbert es *Bab Ballads*, en el que basó algunas de las tramas y canciones de sus operetas. Este trabajo ya no se edita, pero pueden encontrarse copias en tiendas de libros usados.

UN ARTÍCULO PERIODÍSTICO (PÁG. 47)

Los lectores quizás recuerden que en los Juegos Olímpicos de 1988, en Seúl, un atleta canadiense, Ben Johnson, ganó la carrera de los 100 metros, pero perdió la medalla de oro cuando falló en una prueba de esteroides. Nos gustaría dar crédito a esta encantadora sátira, pero no conocemos a su autor. Llegó a nuestras manos a través de unos colegas que asistieron hace unos años a una conferencia de matemáticas en Maine. Nosotros sólo hemos hecho pequeños cambios.

LAS PARADOJAS Y LA PSICOLOGÍA (PÁG. 48)

Para saber más sobre este tema le recomendamos *Pragmatics of Human Communication*, de Watzlawick, Beavin, y Jackson (Norton, 1967), de donde hemos sacado las citas. Las órdenes paradójicas vienen de la pág. 200, el padre que se autorefuta se menciona en la pág. 190, y la madre inconsistente aparece en un pie de pagina en la pág. 214.

Para una explicación de la conexión entre la lógica y el Zen, vea *Gödel, Escher, Bach*, de Douglas Hofstadter (Basic Books, 1979).

EL TÍTULO DE LA SECCIÓN AUTOREFERENCIÁNDOSE (PÁG. 50)

Gödel, Escher, Bach es de Douglas Hofstadter (Basic Books, 1979).

«Este artículo no debería ser rechazado por *Mind*» apareció en *Mind*, vol. 99 (octubre 1990).

EJERCICIOS

1. Creemos que sí. Nos recuerda a un pueblo de Inglaterra en el que un aficionado había construido un modelo a escala de la ciudad muy grande (ocupaba toda una yarda). De hecho, el modelo a escala es tan grande, que está representado, en miniatura, en el modelo a escala, etc., etc. Un ejemplo similar al código genético se verá en la sección «La Vida», en el capítulo 9.

3. ¿Qué pasa con el título de esta sección?, ¿qué pasa con el título del libro de Raymond Smullyan, *Este libro no necesita título*?, ¿qué pasa con el título del libro de Abbie Hoffman, *¡Robe este libro!*?, ¿qué pasa con lo siguiente, de un anuncio para al *Boston Globe* que salió en el *Boston Globe* el 5 de abril de 1990?

¿Ha visto el *Globe* hoy?

Lógica informal

CÓMO DISCUTIR (PÁG. 56)

Unos pocos comentarios adicionales: no está siempre claro en la discusión de Cathy qué es la «democracia». A menudo, uno puede aumentar su control en una argumentación estableciendo sus parámetros. En este caso, usted podría mejorar su posición proporcionando una definición conveniente de «democracia».

¿Mencken es un experto? No está claro qué experto es el que hay aquí. La ciencia política, a pesar de su nombre, no es precisamente una ciencia. Hay enérgicos argumentos casi sobre cualquier tema.

También puede argumentarse que la cita de Mencken apoya la democracia, o al menos es neutral. Después de todo, él está diciendo que bajo un sistema democrático conseguimos lo que deseamos. Quizás la observación muestra más cinismo sobre los estadounidenses que sobre su gobierno.

CÓMO REFUTAR (PÁG. 61)

Pistas para la réplica de Cathy:

Como su oponente no ha definido «democracia», usted lo podría hacer, y hacerlo de manera que le fuese ventajoso. Incluso más importante que definir democracia es definir «bueno». ¿Cuándo es bueno un gobierno?, ¿si da paz?, ¿prosperidad? Usted podría ofrecer los ejemplos de Corea y Taiwan, o incluso España.

Podría machacar con la falta de participación en el gobierno en los Estados Unidos, especialmente entre la gente pobre. Podría atacar más enérgicamente las escuelas. Puede encontrar muchísimos argumentos si sabe dónde mirar.

Nota: Hay algo más que lógica en hacer y defender argumentos. Le ayuda a saber cosas. Le ayuda a haber pensado sobre temas. Empujamos al lector al que le gustaría discutir con éxito a que adquiera conocimiento y razonamiento simplemente leyendo periódicos. Lea un periódico cada día y critique lo que lee.

EXÁMENES TIPO TEST: LECTURA EFICAZ (PÁG. 65)

1. E 3. C 5. C 7. C 9. B 11. C 13. E 15. A

Si está interesado en más problemas prácticos, hay muchos libros sobre el LSAT a precios razonables en la mayoría de las librerías. También podría escribir a Publications, Law Services, Box 40, 661 Penn Street, Newtown, PA 18940. Ellos le mandarán su Information Book, que contiene ejemplos de problemas.

Curiosidades y rompecabezas

The Digestor's Digest, PÁGINA 1 (PÁG. 71)

Es un rompecabezas. ¿Qué podemos descubrir: son anuncios o artículos? Puede trabajar desde diversos ángulos. Podría observar que las dos partes son contradictorias (las dos proclaman que su producto es el que tiene más proteínas). Esto le dice que al menos una de ellas es un anuncio.

¿Qué pasa con la primera? Ésta reivindica que no es un anuncio. ¿Un artículo puede reivindicar eso? Ciertamente, eso sería la verdad. ¿Un anuncio puede reivindicar eso? Ciertamente, ¡eso sería falso! Esto no ayuda. Por tanto, la primera parte puede ser un anuncio o un artículo.

¿Qué pasa con la segunda? Ésta reivindica que es el único anuncio. Ciertamente, un artículo no puede reivindicar eso: sería falso. ¿Un anuncio puede reivindicar eso? Sólo si la primera parte fuese también un anuncio. Entonces, ésta es nuestra respuesta. Los dos son anuncios. El cereal con mayor cantidad de proteínas no es ni Grittibits ni Wheezies. Probablemente es Tofutsies.

CABEZAS PARLANTES (PÁG. 73)

1. «Vivo sin vivir en mí»
2. «Ser o no ser»
3. «Tengo un sueño»
4. «Todos los hombres nacen iguales»
5. «Puede engañarse a todos algún tiempo, y a algunos todo el tiempo, pero no puede engañarse a todos todo el tiempo»

Observe que la viñeta 6 ¡no está escrita en una gramática lógica adecuada!

La fantástica aventura de Tom y Jim

17 de noviembre

La máquina del tiempo parece inútil. El tiempo es una línea. Si Jim viaja hacia el pasado un día se convierte en Jim-Henle-del-16-de-noviembre, no es Jim-Henle-del-17-de-noviembre-que-está-visitando-el-16-de-noviembre. El problema se le plantea a los ingenieros, que hacen algunos arreglos para que cuando se apriete el botón los contenidos de la máquina no cambien, sólo el mundo que la rodea. De esta forma, no se pierden recuerdos.

Ahora Jim quiere investigar la paradoja del viaje en el tiempo. La pregunta estándar es, ¿qué pasa si vas al pasado y matas a tu padre antes de que hayas sido concebido? Jim no planea nada tan hostil o drástico. Él decide irse al pasado un día y hacerse un corte de pelo. ¿Qué pasará?, ¿se verá afectado su propio pelo? Debería, porque está alterando su propio pasado. Por otra parte, no debería, porque eso parecería violar las leyes de la física. En cualquier caso, ¡algo muy interesante pasará!

Tom piensa que esto es una mala idea, pero no sabe por qué. Si está de acuerdo con Tom, vaya a la página 562. Si quiere ver a Jim cortar el pelo de Jim, vaya a la página 582.

3. LÓGICA PROPOSICIONAL, LENGUAJES FORMALES Y ARGUMENTOS INFORMALES

Lógica formal: Lógica proposicional

LENGUAJES FORMALES: PROPOSICIONAL (PÁG. 75)

Los símbolos $\neg$, &, $\vee$, $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$ se denominan *conectivas*; aunque la conectiva de una plaza (unaria) $\neg$ realmente no conecta fórmulas, se denomina conectiva por tradición. El aspecto importante es que todos estos símbolos de Proposicional son lingüísticos. No son realmente las operaciones lógicas de negación, conjunción, etc., sino simplemente una simbolización particular de estas operaciones. Por ejemplo, el símbolo & podría denotar la operación condicional (si quisiéramos), y el símbolo $\Rightarrow$ podría denotar la conjunción.

Es absolutamente crucial tener en mente la distinción entre los símbolos elegidos arbitrariamente y las operaciones o conceptos que denotan los símbolos que hemos elegido para ese fin.

EJERCICIO 1. a, i, j

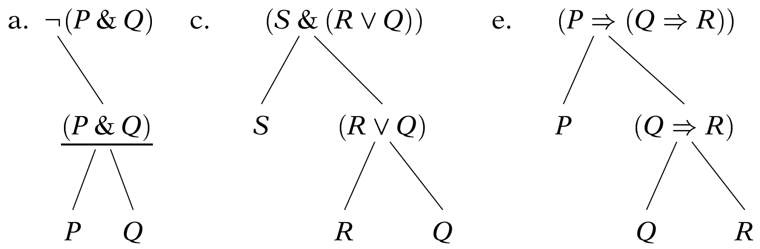
RETO 1. La madre y el padre de Tom son antepasados de Tom. Si x es un antepasado de Tom, entonces también lo son los padres de x, o los padres de cualquier antepasado de Tom es un antepasado de Tom. •

RETO 2

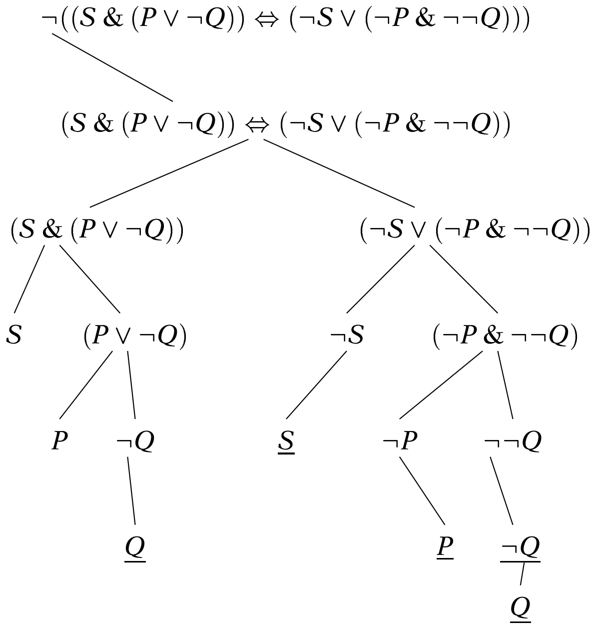
P	Q	R	$P \,\&\, (Q \vee R)$		$(P \,\&\, Q) \vee R$	
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F

Vemos que las tablas de verdad no son la misma, y por tanto, la situación de los paréntesis sí que importa. •

EJERCICIO 2



g.

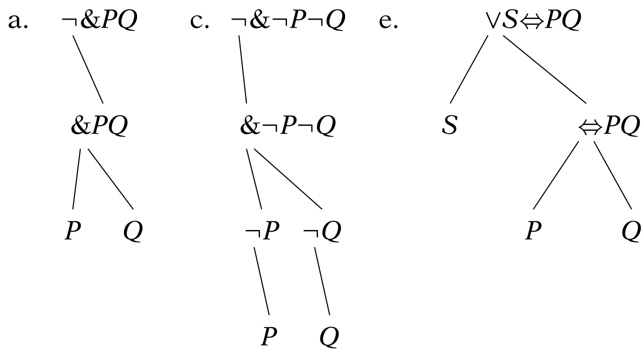


LENGUAJES FORMALES: VARIACIONES SOBRE PROPOSICIONAL (PÁG. 79)

EJERCICIO 1. a. $\neg(P \,\&\, Q)$ c. $\neg(\neg P \,\&\, \neg Q)$ e. $S \vee (P \Leftrightarrow Q)$

EJERCICIO 2. a. $\Rightarrow P \Rightarrow QR$ c. $\neg\&P\vee Q\neg P_1$ e. $\Leftrightarrow\vee\neg P\neg Q\neg\&PQ$

EJERCICIO 3

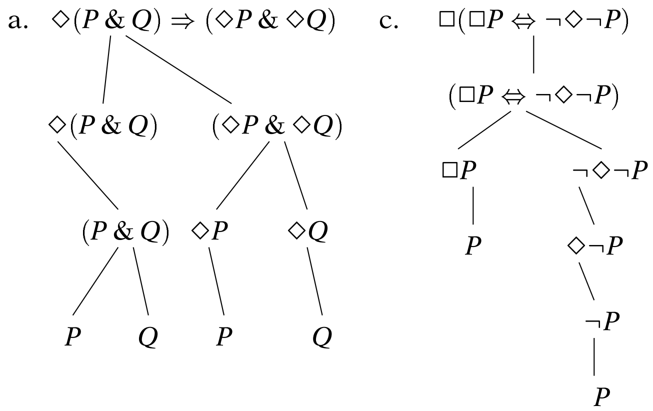


RETO 1. Naturalmente, toda fórmula de Proposicional Débil es una fórmula de Proposicional. Lo contrario no es cierto, pero de hecho, el poder expresivo de Proposicional Débil es el mismo que el de Proposicional. Esto es debido a que toda fórmula de Proposicional se puede parafrasear en Proposicional Débil. En términos técnicos, para toda fórmula de Proposicional existe una fórmula de Proposicional Débil equivalente a ella.

He aquí un ejemplo: la fórmula $P \Rightarrow Q$ se puede escribir como $\neg P \vee Q$. Compare las tablas de verdad de estas dos expresiones: son idénticas. ¿Cómo reescribiríamos $P \Leftrightarrow Q$? Otro reto: ¿se podría debilitar Proposicional Débil aún más, sin que esto suponga una pérdida de poder expresivo? Respondemos a esta pregunta en la sección «Circuitos lógicos» del capítulo 4. •

EJERCICIO 4. $\Diamond\Diamond p$, $\neg\Box q$, $\Box(p \Rightarrow \Diamond q)$, y otras muchas, infinitamente más.

EJERCICIO 5



RETO 2. Pista: considere la definición de, por ejemplo, Proposicional Modal, y realice los cambios oportunos para Proposicional Temporal (el único cambio consiste en mostrar cómo las conectivas de una plaza, N, P, y F generan nuevas fórmulas). •

RETO 3

1. Es un poco complicado escribir una respuesta a esta cuestión en este momento (11 de julio de 2001) que siga siendo razonable durante toda la vida de la presente edición de Razón, dulce razón. Deberíamos especificar si la duración de «ahora» es este instante, este minuto, esta semana, etc. Para que nuestras respuestas perduren, interpretaremos «ahora» como «este siglo».

   Una R tal que $\neg\mathrm{P}R \,\&\, \mathrm{N}R$: «Estamos en el siglo XXI».

   Una R tal que $\mathrm{N}R \,\&\, \neg\mathrm{F}R$: «Estamos en el siglo XXI».

   Una Q tal que $\neg\mathrm{N}Q \,\&\, \mathrm{F}Q$: «Estamos en el siglo XXII».

2. a. Dice que si en algún tiempo pasado fue verdadero que previamente A hubo sido verdadero, entonces hoy es verdadero que A lo fue anteriormente. Es válida en Proposicional Temporal.

   b. No parece que sea válida, pero depende de cómo contemos el tiempo. Consideremos que A es: «Sólo queda un día para que termine el plazo para presentar la declaración de la renta de 1993.» Escribí esto el 16 de abril de 1994. El enunciado fue verdadero el día anterior a este día, pero no fue verdadero cualquier día anterior a este último. Si contamos el tiempo en días, entonces PA es verdadera, pero no lo es PPA. Por otra parte, si contamos el tiempo en horas, entonces podemos argumentar que PPA es verdadera, dado que el día anterior a mediodía, PA fue verdadera (de hecho fue verdadera tres horas antes). De forma más general, PA ⇒PPA será válida siempre y cuando el tiempo no tenga un primer instante (puede que el tiempo transcurra siempre hacia atrás) al que le siga un segundo instante (puede que el tiempo sea continuo). Si A es verdadera en este primer instante, PA será verdadera en el segundo instante, pero entonces PPA será falsa. •

TABLAS DE VERDAD (PÁG. 83)

EJERCICIO

1. *a*) y *d*) tienen las mismas tablas de verdad. *b*) y *c*) tienen las mismas tablas de verdad y por lo tanto son equivalentes. Salvo en estos casos, ninguna fórmula implica otra de ellas.

3.

	a	**b**
P Q R	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$
V V V	V **V** V V V	V V V **V** V
V V F	V **F** V F F	V V V **F** F
V F V	V **V** F V V	V F F **V** V
V F F	V **V** F V F	V F F **V** F
F V V	F **V** V V V	F V V **V** V
F V F	F **V** V F F	F V V **F** F
F F V	F **V** F V V	F V F **V** V
F F F	F **V** F V F	F V F **F** F

Las tablas de verdad no son la misma. Hay filas en las que $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ es falsa, pero $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ no lo es, y por lo tanto, las fórmulas no son equivalentes. Puesto que no hay ninguna fila en la que ocurra lo contrario, $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ implica $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

5. La tabla de verdad sólo contiene *V*, por lo tanto $P \Rightarrow Q$ es lógicamente equivalente a $\neg P \vee Q$.

7.

	a	**b**	**c**	**d**
P	$P \,\&\, \neg P$	P	$\neg P$	$P \Rightarrow \neg P$
V	V **F** F	V	F	V **F** F
F	F **F** V	F	V	F **V** V

c) y *d*) son equivalentes, y *a*) implica a cada una de *b*), *c*) y *d*). Nótese que $(P \Rightarrow \neg P)$ no es contradictoria, ¡sino lógicamente equivalente a $\neg P$!

TEORÍA LÓGICA PROPOSICIONAL (PÁG. 89)

RETO 1

1. No necesariamente. A es consistente, es decir, algunas veces es verdadera, pero no es una tautología.
3. Inconsistente. Si A es siempre verdadera, entonces $\neg A$ es siempre falsa.
5. No es válida. Si A no es siempre falsa, entonces $\neg A$ no es siempre verdadera.
7. La única F que hay en la tabla de verdad de $A \Rightarrow B$ está en la línea donde A es verdadera y B es falsa. Si A es una contradicción, entonces A no es nunca verdadera, y en estas circunstancias, $A \Rightarrow B$ es verdadera. •

RETO 2

1. Si A es verdadera, entonces, dado que A implica B, B debe ser verdadera. Si A es falsa, entonces B no puede ser verdadera (si lo fuese, A sería verdadera, puesto que B implica A), y por tanto, B es falsa. De modo que, o bien A y B son ambas verdaderas, o bien son ambas falsas. Esto demuestra que son equivalentes.
3. En cualquier línea de la tabla de verdad de A, B y $A \Leftrightarrow B$, o bien A y B son ambas verdaderas, o bien son ambas falsas (dado que A es equivalente a B). En ambos casos, $A \Leftrightarrow B$ es verdadera. Por tanto, $A \Leftrightarrow B$ es una tautología. Por otra parte, si $A \Leftrightarrow B$ es una tautología, entonces en ninguno de los casos se cumple que A y B tomen valores de verdad opuestos. Por tanto, A es equivalente a B. •

RETO 3

1. Supongamos que A, B y C implican D. Entonces, si $(A \,\&\, (B \,\&\, C))$ es verdadera, cada una de las fórmulas A, B y C debe ser verdadera individualmente, y por tanto, D es verdadera. De modo que $(A \,\&\, (B \,\&\, C))$ implica D. Supongamos ahora que $(A \,\&\, (B \,\&\, C))$ implica D. Entonces, si cada una de las fórmulas A, B y C son verdaderas, entonces $(A \,\&\, (B \,\&\, C))$ es verdadera, y por tanto también lo es D. Así pues, A, B y C implican D. •

ALGUNAS TAUTOLOGÍAS E IMPLICACIONES BÁSICAS

EJERCICIOS

1. Para el ejemplo 1:

X Y Z W	***X*** $\Rightarrow$	**(*Y*** $\Rightarrow$	**(*Z*** $\Rightarrow$ ***W*))**	***X*** $\Rightarrow$	**((*Y*** $\Rightarrow$ ***Z*)**	$\Rightarrow$ ***W*)**
V V V V	**V**	V	V	**V**	V	V
V V V F	**F**	F	F	**F**	V	F
V V F V	**V**	V	V	**V**	F	V
V V F F	**V**	V	V	**V**	F	V
V F V V	**V**	V	V	**V**	F	V
V F V F	**V**	V	F	**V**	F	V
V F F V	**V**	V	V	**V**	F	V
V F F F	**V**	V	V	**V**	F	V
F V V V	**V**	V	V	**V**	V	V
F V V F	**V**	F	F	**V**	V	F
F V F V	**V**	V	V	**V**	F	V
F V F F	**V**	V	V	**V**	F	V
F F V V	**V**	V	V	**V**	F	V
F F V F	**V**	V	F	**V**	F	V
F F F V	**V**	V	V	**V**	F	V
F F F F	**V**	V	V	**V**	F	V

2. a. Ya que $\neg\neg B$ es equivalente a B, $A \,\&\, \neg\neg B$ es equivalente a $A \,\&\, B$, por el principio de reemplazo.

   b. Utilizamos la equivalencia descrita anteriormente en la sección, $(A \,\&\, (B \,\&\, C)) \Leftrightarrow ((A \,\&\, B) \,\&\, C)$, a la que por conveniencia llamaremos (&). (&) nos da la equivalencia de $(Y \,\&\, (Z \,\&\, W))$ y $((Y \,\&\, Z) \,\&\, W)$, y entonces utilizando el principio de reemplazo, $(X \,\&\, (Y \,\&\, (Z \,\&\, W))) \Leftrightarrow (X \,\&\, ((Y \,\&\, Z) \,\&\, W))$. (&) también nos da la equivalencia de $(X \,\&\, (Y \,\&\, Z))$ y $((X \,\&\, Y) \,\&\, Z)$, y entonces el principio de reemplazo nos da $((X \,\&\, (Y \,\&\, Z)) \,\&\, W) \Leftrightarrow (((X \,\&\, Y) \,\&\, Z) \,\&\, W)$. Ahora, (&) nos da $(X \,\&\, ((Y \,\&\, Z) \,\&\, W)) \Leftrightarrow ((X \,\&\, (Y \,\&\, Z)) \,\&\, W)$, y juntando éstas tenemos $(X \,\&\, (Y \,\&\, (Z \,\&\, W))) \Leftrightarrow (((X \,\&\, Y) \,\&\, Z) \,\&\, W)$.

La fantástica aventura de Tom y Jim

17 de noviembre

Tom y Jim señalan que no es necesario ningún experimento para mostrar que el condicional contrafactual es diferente. El sistema de la lógica proposicional es una manera de interpretar oraciones en castellano, pero los lógicos reconocen que el castellano es bastante más complicado. Proposicional no captura todos los tonos y matices del castellano: ironía, sarcasmo, invectiva, etc. El caso es que el significado en castellano de «Si Dukakis hubiera ganado en 1988, entonces Dan Quayle hubiera sido vicepresidente» no es el significado que tiene en Proposicional, y los lógicos lo sabían antes de que se inventara la máquina del tiempo. Vaya a la página 539.

Cerca y Acerca de la lógica

COMO COMO COMO (PÁG. 97)

EJERCICIO. «Almuerzo de la manera que almuerzo.»

RETOS

1. a. «Dado que almuerzo de la forma que almuerzo, (pues) almuerzo». Otra forma: «Puesto que (por norma) almuerzo, (ahora) almuerzo de la forma que (generalmente) almuerzo.»

   b. «Dado que almuerzo como de la forma que almuerzo, (pues) almuerzo.» Otra forma: «Puesto que (por norma) almuerzo, (ahora) almuerzo como de la forma que (generalmente) almuerzo.»

   c. «Dado que (generalmente) almuerzo de la forma que almuerzo, (pues) almuerzo de la forma que almuerzo (ahora).»

   d. «Dado que (generalmente) almuerzo de la forma que almuerzo, (pues ahora) almuerzo como de la forma que almuerzo (generalmente).» Otra forma: «Dado que (generalmente) almuerzo como de la forma que almuerzo, (pues ahora) almuerzo de la forma que almuerzo (generalmente).»

2. Imaginemos que Antonio le dice a Juan (en señal de protesta) «¡Cómo!», Juan le contesta «¡Cómo cómo!» («¡Cómo te atreves a decirme «cómo» !»), a lo que Antonio le replica «¡Cómo cómo cómo!» («¡Cómo te atreves a decirme «cómo cómo» !»), etc. De forma que Antonio y Juan podrían pasar así el resto de sus días a menos que uno de ellos decida terminar con esta situación poco fructífera. •

¿Existe alguna otra palabra estrella en castellano? Si ha seguido leyendo, ya sabrá que, por ejemplo, «media» también lo es. Dejamos el descubrimiento de otras a la curiosidad del lector. Para excitar esa curiosidad, sin embargo, le sugerimos las palabras estrella que una estudiante nuestra (de los autores), Gina Cooke, después de una investigación extensiva, descubrió en inglés, además de «buffalo» :

bear	duck	loofah	seal	squirrel
buck	fox	perch	shark	stag
char	hog	pig	shrimp	steer
clam	horse	pike	smelt	stint
crane	iron	rail	snipe	whale

LENGUAJES ARTIFICIALES Y NATURALES (PÁG. 98)

EJERCICIOS

1. a. O

SN + SV	Regla 1
Det + N + SV	Regla 2
Una + N + SV	Regla 4
Una + N + V + a + SN	Regla 3
Una + niña + V + a + SN	Regla 5
Una + niña + V + a + Det + N	Regla 2
Una + niña + peinó + a + Det + N	Regla 6
Una + niña + peinó + a + la + N	Regla 4
Una + niña + peinó + a + la + mujer	Regla 5

2. a. *Pista:* ¿Cómo podemos conseguir poner un verbo al principio de la oración? La única regla que genera un verbo es la 3, pero sólo se puede aplicar cuando ya hay un sintagma nominal delante.

REGLAS DE REESCRITURA Y AUTÓMATAS FINITOS (PÁG. 102)

Los lenguajes regulares se pueden describir de otra forma mediante el uso de *expresiones regulares*. Éstas usan generalmente el asterisco (*), el cual ya mencionamos en «Como como como». Por ejemplo, el lenguaje «Cómo» se representa mediante la expresión

$$\text{cómo}^*$$

(que significa cualquier número de *cómo*). El otro lenguaje regular mencionado en el capítulo se representa mediante

$$(ba)^*(a|bb)$$

(cualquier número de «*ba*» seguidos de *a* o de *bb*).

Si restringimos nuestras reglas de reescritura a reglas de la forma

⟨una sola letra mayúscula⟩ ⟶
⟨una cadena de letras mayúsculas y minúsculas⟩

obtenemos lo que se denomina *lenguajes independientes del contexto*. Podemos comprobar si estos lenguajes son vacíos; es decir, hay un algoritmo que puede decidir si existe alguna oración legítima. Sin embargo, todavía hay algunos inconvenientes. Por ejemplo, no existe ningún algoritmo que, tomando como entrada dos conjuntos de reglas, sea capaz de decidir si los dos lenguajes que representan son realmente el mismo.

Si restringimos nuestras reglas de reescritura a reglas de la forma

⟨una sola letra mayúscula⟩
⟶ ⟨una letra mayúscula, seguida (posiblemente) de letras minúsculas⟩

o

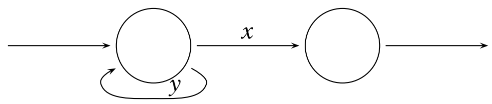
⟨una letra mayúscula⟩ ⟶ ⟨letras minúsculas⟩

entonces obtenemos lenguajes regulares. Se corresponden con reglas que simplemente añaden cosas al principio de las oraciones.

Para aprender más sobre este tema lea un libro de texto sobre la teoría de lenguajes formales, un campo que está en la intersección de la lingüística y la ciencia de la computación. Un libro bastante razonable es *A First Course in Formal Language Theory*, de V. J. Rayward-Smith (Blackwell Scientific Publications, 1983).

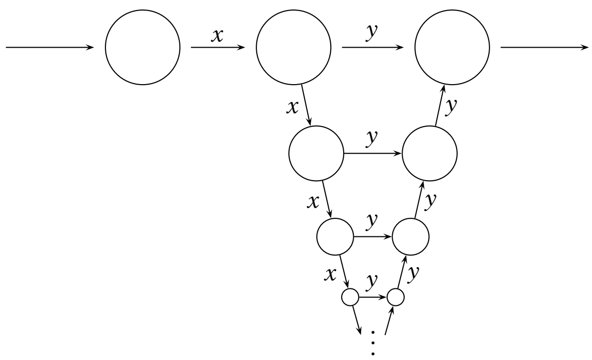
EJERCICIOS

1.

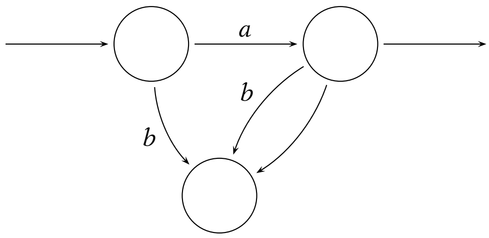


2. $S \to X$
$X \to Xy$
$X \to Zx$
$Z \to \epsilon$

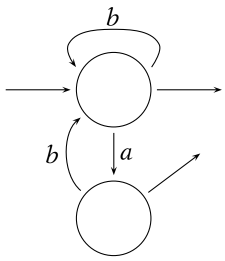
5.



6.



8. a.



8. c. Imposible.

RETO EXTRA. Encuentre expresiones regulares para los lenguajes de los ejercicios 1, 3 y 6. Respuestas: y^*x, ab^*c, $a(bba|ba)^*$ (también existen otras formas). •

MEDIA MEDIA MEDIA (PÁG. 106)

RETOS

1. a. «(Ella/él) llega a la mitad de la mitad de la mitad del calcetín.»
   b. «(Ella/él) llega a la mitad de la mitad de la mitad de la mitad del calcetín.»
2. Por lo que hemos explicado en la sección, y a la vista del reto a) anterior, podemos decir que las secuencias de longitud comprendida entre 1 y 4 construidas únicamente con la palabra «media» son oraciones legítimas en castellano. Está claro que también lo son todas las que tienen longitud mayor que 4, puesto que éstas serían de la forma: «Media media ... media media» y por tanto se podrían interpretar como «(Ella/él) llega a la mitad de la mitad ... de la mitad del calcetín.» •

Considere lo que le ocurre a la persona que media «media media», y luego media «media media media», y así sucesivamente. Igual que Aquiles, por mucho que corra, nunca llegará a alcanzar a la lenta tortuga (ver el Ejemplo 1 de «Paradoja» en el capítulo 1), esta persona ¡nunca llegará a quitarse el calcetín!

Lógica informal

LAS CONCLUSIONES (PÁG. 107)

EJERCICIO

1. El señor Pipes está equivocado al decir que los turcos son el segundo mayor grupo étnico del Islam.
3. La exhibición de vuelo no debió realizarse.
5. No se debería considerar como fuente de energía a la energía atómica.
7. El continuo aumento del precio de la gasolina está justificado.
9. Éste no es exactamente un argumento, sino un ruego. No todo es argumentación.

ENUNCIADOS DE APOYO A LA CONCLUSIÓN (PÁG. 112)

EJERCICIO

1. El apoyo en este caso es bastante bueno. El único enunciado que quizás hiciera falta sería para clarificar el significado de «competitivo», para asegurarse que lo que se quiere decir es que obtengan notas competitivas en los exámenes de matemáticas.
3. No está mal, pero haría falta un enunciado adicional: que un ser todo amor querría evitar el sufrimiento de niños inocentes. Este enunciado podría rebatirse, por ejemplo, aduciendo que el sufrimiento temporal de un niño puede garantizarle la felicidad eterna.
5. Hace falta el enunciado de que las ejecuciones son asesinatos. Este argumento es debatible.
7. Terrible. Necesitamos el enunciado de que comer (y no *lo que él* comió) origina cáncer de estómago. Adicionalmente, necesitaríamos el enunciado de que no comer le hubiera salvado.
9. Bastante bueno. Sin embargo, se echa de menos el enunciado de que no existen beneficios para la salud asociados a fumar que puedan compensar o superar el riesgo de cáncer de pulmón.
11. No está mal, pero hace falta un enunciado adicional afirmando que el gravamen impositivo del tabaco sería efectivamente disuasorio.

RELEVANCIA DE LOS ARGUMENTOS (PÁG. 116)

EJERCICIO

1. Todos los enunciados son relevantes.
3. El enunciado (e) no hace realmente falta, pero tampoco debilita la argumentación, como haría un enunciado totalmente irrelevante.
5. Todos los enunciados son relevantes.
7. El enunciado (a) no es relevante, está ahí para satisfacer el patriotismo del lector. El enunciado (h) es de hecho relevante, una vez que se reconoce su

verdadero significado. La conclusión del argumento es que no deberíamos ir a la guerra en el Golfo. El escritor establece dos posibles razones para ir a la guerra y las rebate. La segunda razón consiste en mantener bajo el precio de la energía, la cual rebate sugiriendo que se podrían tomar medidas conservacionistas en lugar de ir a la guerra. La administración afirma que está tomando tales medidas. El enunciado suspicaz (h) afirma en realidad que no se puede creer en la palabra de la administración. El enunciado (j) es retórico, está ahí para poner énfasis.

LAS PREMISAS (PÁG. 120)

EJERCICIO

1. a, c, d, e
3. a, c, d + e (afirma que sería una pérdida de dinero)
5. a, b, c, d, f, g, h
7. c, d, f, g, h, i y posiblemente b

CATHY DESAYUNA (PÁG. 124)

A estas alturas debería haber quedado claro que las opiniones de Cathy no reflejan necesariamente las de los autores (o de la editorial). Reconocemos que estamos poniendo el dedo en asuntos de gran controversia. Aun así, nos sorprendió bastante la tormenta de protestas que se nos vino encima cuando nuestra propia clase leyó este argumento. Repetimos aquí lo que les dijimos: para argumentar de manera efectiva, uno debe separar las cuestiones lógicas de las emocionales. Tanto si el asunto es la paz, el patriotismo o los cereales tostados, se tienen que dejar a un lado los sentimientos para tratar de forma objetiva los hechos relevantes.

EJERCICIOS

1. Claramente, la conclusión es que comer Cheerios es malo. Los enunciados relevantes son: «Tiene un montón de azúcar», «El azúcar es malo», «Estás bombeando azúcar en tu sangre, el cuerpo tiene que contraatacar con insulina, lo cual hace bajar el azúcar en sangre, de manera que tendrás hambre antes de la clase de las once», «Los Cheerios tienen más sal por onza de peso que las patatas fritas», «La sal es mala. Te eleva la presión arterial. ¿Pondrías leche en un cuenco con patatas fritas para zampártelas como desayuno?», «Los EE.UU. utilizan el azúcar para oprimir a las naciones del tercer mundo. Compran el azúcar de plantaciones gigantescas a precios sobredimensionados. Es como un soborno. Garantiza el poder y el bienestar de las clases dominantes al tiempo que desanima a la industrialización. Entonces esas naciones nos venden sus materias primas baratas y compran nuestros productos. Igual les daría

ser colonias», «Por eso es por lo que nos odian. Incluso después de haberse rebelado. Asaltan nuestras embajadas, apoyan a los terroristas y nos llaman el gran Satán», «Además, tienen esa forma tan tonta».

2. *Pistas para rebatirla*: Compruebe el contenido total real de azúcar (sacarosa) de los Cheerios —de hecho, es incluso menor que el de los Grape Nuts—. La falacia que aparece en la frase sobre la leche con patatas fritas es fácil de rebatir. También se puede argumentar que la política externa no se discute en la mesa del desayuno. ¡Incluso puede que usted aprecie esa forma que tienen!

Curiosidades y rompecabezas

The Digestor's Digest, PÁG. 2 (PÁG. 125)

Una vez más, ambas partes están en desacuerdo, así que al menos una es un anuncio. ¿Podría ser la primera? Afirma que es la otra la que es un anuncio. Si la primera es un anuncio, tal afirmación no es verdadera, así que la segunda parte sería un artículo. ¿Es esto posible? La segunda afirma que ambas son igualmente correctas, lo cual no es verdadero si la primera es un anuncio y la segunda un artículo. Llegamos a un callejón sin salida, así que la primera no puede ser un anuncio.

Así, sabemos que la primera es un artículo, lo cual nos lleva a que la segunda es un anuncio. Si lo comprobamos, veremos que todo encaja.

UN ROMPECABEZAS NO LÓGICO (PÁG. 126)

a. 27 letras del alfabeto (sin ch ni ll)
c. 1.001 cuentos por las noches
e. 54 cartas de la baraja
g. 88 teclas del piano
i. 18 hoyos en un campo de golf
k. 90 grados en un angulo recto
m. 8 lados en una señal de stop
o. $\frac{1}{4}$ es medio medio (la mitad de la mitad)
q. 5 dígitos en un código postal
s. 11 jugadores en un equipo de fútbol
u. 29 días de febrero en un año bisiesto
w. 40 días y noches del Diluvio Universal

CRUCIGRAMAS AUTOREFERIDOS (PÁG. 127)

1. $\boxed{^{1}9}$

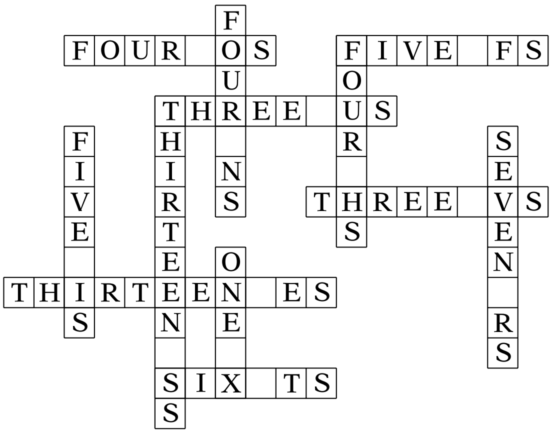
2.

1	1
6	4

3.

9	8	1
8	3	0
2	7	9

4.



En *Word Ways*, agosto 1992 (vol. 25, n.º 3) apareció un artículo de Lee Sallows sobre la construcción de reflexicones.

La fantástica aventura de Tom y Jim

17 de noviembre

Tom y Jim llegan un poco pronto, antes incluso de que ellos mismos partan hacia el pasado. La situación resulta algo embarazosa, aunque nadie sabe muy bien por qué. El Jim al que se encuentran tiene el pelo de cuatro pulgadas de largo, que es lo que parece que debiera ser.

Poniendo sus (cuatro) cabezas a pensar, llegan a la conclusión de que no hay paradoja alguna. Los Jim y Tom originales han estado de visita, no en su pasado, sino en el pasado de un universo alternativo. Después de todo, en su propio pasado ¡nunca se visitaron! ¿Están ahora de vuelta en su propio universo? Es difícil de decir. Tenemos dos Jims, dos Toms y dos Infundíbulas.

Jim 1 (nuestro Jim) sugiere que tienen delante una gran oportunidad para investigar los condicionales contrafactuales. Vaya a la página 516.

4. ARGUMENTOS VÁLIDOS, ARGUMENTOS CONVINCENTES Y LÓGICA PUNK

Lógica formal: Argumentos válidos

ESTRUCTURAS ARGUMENTALES VÁLIDAS (PÁG. 131)

RETOS

1. a. No válido.

P Q	**P $\Rightarrow$ Q**
V V	V
V F	F
F V	**V**
F F	V

c. Válido.

Q R T	**Q $\Rightarrow$ R**	**R $\Rightarrow$ T**	**Q $\Rightarrow$ T**
V V V	**V**	**V**	**V**
V V F	V	F	F
V F V	F	V	V
V F F	F	V	F
F V V	**V**	**V**	**V**
F V F	V	F	V
F F V	**V**	**V**	**V**
F F F	**V**	**V**	**V**

e. Válido.

P Q	**Q $\Rightarrow$ P**
V V	**V**
V F	**V**
F V	F
F F	V

g. Válido.

P Q	**Q** $\vee$ $\neg$**Q**
V V	**V**
V F	**V**
F V	V
F F	V

i. No válido.

Q P R	**Q ∨ P**	**¬R ∨ ¬P**	**R ⇒ ¬Q**
V V V	V	F	F
V V F	**V**	**V**	**V**
V F V	V	V	F
V F F	**V**	**V**	**V**
F V V	V	F	V
F V F	**V**	**V**	**V**
F F V	F	V	V
F F F	F	V	V

3. Véase Reto 13 en «Formalizar para validar». •

FORMALIZAR PARA VALIDAR (PÁG. 134)

RETO

1. $A \Rightarrow E$, $E \therefore A$ ($A =$ «Aprendes lógica», $E =$ «Estudias»). No válido. Obsérvese la siguiente línea de la tabla de verdad:

A E	**A ⇒ E**
F V	V

en la que ambas premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa.

3. $T \Rightarrow A$ (ó $\neg T \vee A$), $A \Rightarrow L$, $\neg T \Rightarrow \neg D \therefore D \Rightarrow A$ ($A =$ «Aprendes lógica», $T =$ «Obtienes el título», $L =$ «Lees este libro», $D =$ «Vas a la Facultad de Derecho»). Válido.

T A L D	**T ⇒ A**	**A ⇒ L**	**¬T ⇒ ¬D**	**D ⇒ A**
V V V V	**V**	**V**	**V**	**V**
V V V F	**V**	**V**	**V**	**V**
V V F V	V	F	V	V
V V F F	V	F	V	V
V F V V	F	V	V	F
V F V F	F	V	V	V
V F F V	F	V	V	F
V F F F	F	V	V	V
F V V V	V	V	F	V
F V V F	**V**	**V**	**V**	**V**
F V F V	V	F	F	V
F V F F	V	F	V	V
F F V V	V	V	F	F
F F V F	**V**	**V**	**V**	**V**
F F F V	V	V	F	F
F F F F	**V**	**V**	**V**	**V**

5. $L \Rightarrow M$, $L \therefore M$, ($L =$ «Usted aboga por la legalización de las drogas», $M =$ «Usted transmite un mensaje ...»). Válido.

L ⇒ M	L	M
V	**V**	**V**
F	V	F
V	F	V
V	F	F

7. $L \Rightarrow (T \,\&\, C \,\&\, I)$, $I \Rightarrow D$, $\neg D \therefore \neg L$ ($L =$ «Se legalizan las drogas», $T =$ «Habrá más dinero para tratar a los drogadictos», $C =$ «Habrá menos delicuencia derivada de las drogas», $I =$ «Esa chusma perderá su principal fuente de ingresos», $D =$ «Esa chusma se debilitará y desaparecerá»). Válido.

L	T & C	I	D	L ⇒ (T & C & I)	I ⇒ D	¬D	¬L
V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	V	F	V	F	V	F
V	V	F	V	F	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	F	V	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

9. $\neg I \Rightarrow (F \mathbin{\&} \neg B)$ (o también $I \vee (F \mathbin{\&} \neg B)$), $I \Rightarrow P \therefore B \Rightarrow P$ ($I =$ «Los tipos de interés subirán», $F =$ «La Reserva Federal interviene», $B =$ «La bolsa cae», $P =$ «Muchos perderán su trabajo»). Válido.

I F B P	**¬I ⇒ (F & ¬B)**	**I ⇒ P**	**B ⇒ P**
V V V V	**V**	**V**	**V**
V V V F	V	F	F
V V F V	**V**	**V**	**V**
V V F F	V	F	V
V F V V	**V**	**V**	**V**
V F V F	V	F	F
V F F V	**V**	**V**	**V**
V F F F	V	F	V
F V V V	F	V	V
F V V F	F	V	F
F V F V	**V**	**V**	**V**
F V F F	**V**	**V**	**V**
F F V V	F	V	V
F F V F	F	V	F
F F F V	F	V	V
F F F F	F	V	V

11. $L \Rightarrow R$, $L \vee \neg L$, $\neg L \Rightarrow P$, $(R \vee P) \Rightarrow E \therefore E$ ($L =$ «La política del próximo presidente es legalizar las drogas», $R =$ «La política del próximo presidente reduce la adicción», $P =$ «La política del próximo presidente proclama el peligro de las drogas», $E =$ «La política del próximo presidente es un éxito»). Válido. Pero ¿es la oposición a la legalización la negación de la legalización? Si no lo es, entonces $\neg L$ debe reemplazarse por O, pero el argumento aún sería válido.

L R P E	**L ⇒ R**	**L ∨ ¬L**	**¬L ⇒ P**	**(R ∨ P) ⇒ E**
V V V V	**V**	**V**	**V**	**V**
V V V F	V	V	V	F
V V F V	**V**	**V**	**V**	**V**
V V F F	V	V	V	F
V F V V	F	V	V	V
V F V F	F	V	V	F
V F F V	F	V	V	V
V F F F	F	V	V	V
F V V V	**V**	**V**	**V**	**V**
F V V F	V	V	V	F
F V F V	V	V	F	V
F V F F	V	V	F	F
F F V V	V	V	F	V
F F V F	V	V	V	F
F F F V	V	V	F	V
F F F F	V	V	F	V

13. Este argumento tiene muchas palabras, pero se puede reducir simplemente a: $S \Rightarrow R, R \therefore S$ ($S =$ «Subir los impuestos era lo correcto», $R =$ «El país se recuperó»). No válido. Es posible que ambas premisas sean verdaderas, y que la conclusión sea falsa. Esto ocurre si S es falso y R es verdadero. Nota: ésta es precisamente una respuesta al Reto 3 en «Estructuras argumentales válidas».

15. $C, S \therefore G$ ($C =$ «Clark Kent lleva gafas», $S =$ «Superman es Clark Kent», $G =$ «Superman lleva gafas»). No válido. Por supuesto, hay alguna validez en este argumento, pero Proposicional es incapaz de expresarla. •

UN ATAJO PARA VALIDAR ARGUMENTOS (PÁG. 137)

EJERCICIO

1. El único caso en el que la conclusión puede ser falsa es cuando R es falso y P es verdadero. Ahora bien, si P es verdadero, Q debe ser verdadero, en otro caso, la primera premisa sería falsa. Con esta asignación de valores de verdad que hemos impuesto, la segunda premisa es falsa. Por tanto, es imposible hacer verdaderas a ambas premisas y falsa a la conclusión, así que el argumento es válido.

3. Para hacer falsa a la conclusión sólo necesitamos que, o bien U sea falsa, o bien que R lo sea. Probemos primero con R. Si R es falsa, entonces, para que la primera premisa sea verdadera, necesitamos que S sea verdadera. Ahora necesitamos que T sea verdadera, para que la segunda premisa sea verdadera. Con S y T verdaderas, automáticamente, la cuarta premisa es verdadera. Para hacer verdadera a la tercera premisa, sólo necesitamos que U sea falsa. Esto es posible, y por lo tanto, hemos encontrado una línea de la tabla de verdad que demuestra que el argumento no es válido: S y T verdaderas, y U y R falsas.

FORMALIZACIÓN DEL CASTELLANO (PÁG. 139)

& e «y»

Para profundizar en la teoría de Grice, véase «Logic and conversation» en *The Logic of Grammar*, editado por Donald Davidson y Gilbert Harman (Dickinson, 1975).

EJERCICIOS

1. Ciertamente, está la implicatura conversacional de que yo no apruebo a Jim, dado que parece que, intencionadamente, no he mencionado su cualificación como matemático. Por otra parte, no hay implicaciones *lógicas*, puesto que yo podría cancelar la implicatura posteriormente alabando las cualidades investigadoras y docentes de Jim.

$\vee$ *y «o»*

EJERCICIO. Homer dijo una falsedad si la estructura lógica de la oración era (limpiar $\veebar$ salir a jugar) («o» exclusivo). De hecho, la estructura lógica es solamente (limpiar $\vee$ ¬salir a jugar), es decir, (¬ limpiar $\Rightarrow$ ¬ salir a jugar). Homer puede cancelar la implicatura conversacional (limpiar $\Rightarrow$ salir a jugar) añadiendo, por ejemplo, «... y más te vale que hagas la limpieza antes de que llueva».

$\Rightarrow$ *y «si ... entonces»*

Otra justificación de la tabla de verdad de $\Rightarrow$ se deriva de una analogía legal. Se trata de la ley que dice que si un coche está aparcado en State Street en Northampton, Massachusetts, entre las 10:00 a.m. y las 6:00 p.m. (excepto domingos y festivos), entonces el contador del aparcamiento no debe indicar que se está cometiendo una infracción. Esto es un «si ... entonces» legal. Claramente, si tenemos el coche aparcado en State Street y hemos introducido dinero en el contador del aparcamiento (V, V), entonces estamos obedeciendo la ley (V $\Rightarrow$ V es V). Tan claro como que si tenemos el coche aparcado en State Street durante las horas críticas y no hemos introducido dinero en el contador del aparcamiento (ni lo ha hecho nadie) (V, F), entonces estamos infringiendo la ley (V $\Rightarrow$ F es F). Por otra parte, si no hemos aparcado el coche en State Street, pero por alguna extraña razón hemos introducido dinero en el contador del aparcamiento (F, V), ¿estamos infringiendo la ley? Por supuesto que no (F $\Rightarrow$ V es V). Finalmente, si nunca hemos conducido un coche ni nunca en nuestra vida hemos salido de Vladivostok (F, F), ¿estamos infringiendo la ley de la ciudad de Northampton, Massachusetts? No (F $\Rightarrow$ F es V).

Cerca y Acerca de la lógica

MINIAC (PÁG. 148)

EJERCICIO

1 y 2. Si la respuesta a la pregunta 2 es correcta, entonces el valor de verdad de la respuesta de Miniac a la pregunta 1 es el mismo que el valor de verdad de su respuesta a la pregunta 2. La respuesta a la pregunta 2 es correcta, y por tanto, la respuesta a la pregunta 1 es correcta, así que lloverá mañana.

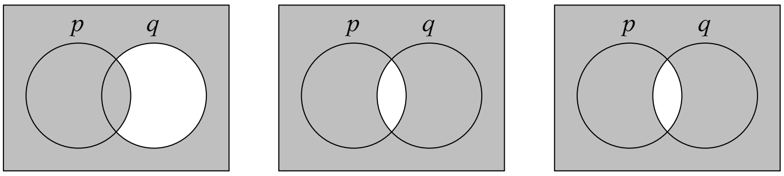
3. ¡No lo sabemos!

4. Para tener una pista, vea las secciones «Paradoja» del capítulo 1 y «El título de la sección autoreferenciándose» del capítulo 2. ¿Qué le ocurre al argumento cuando la primera respuesta es incorrecta pero sale «cara» en el segundo lanzamiento?

CONJUNTOS (PÁG. 150)

RETO

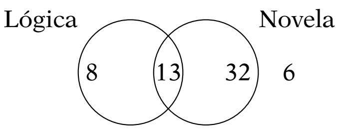
1. a. $p \cup q^c$ b. $(p \cap q)^c$ e. $p^c \cup q^c$.
2. a. c. e.



3. Entre estos tres, (c) y (e) son el mismo, de modo que $\neg(P \mathbin{\&} Q)$ y $\neg P \vee \neg Q$ son equivalentes. Si incluimos (b), (d) y (f), entonces existen equivalencias adicionales. •

EJERCICIOS

1. 45.

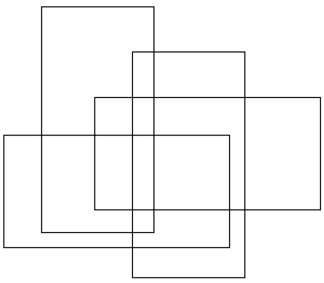


2. a. 4, ,6, 7, 8
   b. 1, 3, 4, 7
   c. 8 combinaciones:

(1)	**(2)**	**(3)**
a favor	a favor	a favor
a favor	a favor	en contra
a favor	en contra	a favor
a favor	en contra	en contra
en contra	a favor	a favor
en contra	a favor	en contra
en contra	en contra	a favor
en contra	en contra	en contra

   ¿Le recuerda esto algo?
   d. 3 %, 1 %, 21 %, 20 %, 23 %, 1 %, 12 %, 19 %
   e. Bien estar a favor de (3) y en contra de (1) y (2) o a favor de los tres. Cualquiera de ellos le da a usted el 57 % de los votos.

3.



5. Puede ver cómo Lewis Carroll trata estas cuestiones en «El juego de la lógica», en el capítulo 5.

La fantástica aventura de Tom y Jim

15 de noviembre

Está lloviendo a cántaros. Rápidamente Jim ajusta el dial de la máquina del tiempo a 24 horas en el pasado y aprieta el botón. Vaya a la página 540.

CIRCUITOS LÓGICOS (PÁG. 156)

EJERCICIOS

1. a. El resultado es 110111. El efecto es el de $\neg P \vee Q$.
   c. *Pista*: este artilugio funciona lo mismo que el de un mecanismo más simple.
3. *Pista*: es $\neg P \vee \neg Q$. Tendrá una forma un poco parecida a la de la figura del ejercicio 1c.

BERTRAND I (PÁG. 158)

La cita del principio de la sección nos llamó la atención mientras leíamos *The Annotated Alice* de Lewis Carroll, notas e introducción de Martin Gardner (Forum Books, 1960). Es ésta una edición fascinante de los libros de Alicia que nos da más que una idea acerca de su creador.

Lógica informal

LA CRÍTICA DE ARGUMENTOS (PÁG. 159)

EJERCICIOS

1. Las siguientes respuestas no están completas. Hay muchas formas de atacar a la mayoría de los argumentos. (1) A primera vista, el argumento parece muy depurado. Sin embargo, hay un posible fallo. El argumento asume que todos los musulmanes de Pakistán, India y Bangladesh pertenecen al mismo grupo étnico. Puede que esto no sea así, dependiendo de lo que entendamos por «grupo étnico». Por supuesto que hablan lenguajes diferentes. Se podría argumentar que incluso los musulmanes de Pakistán pertenecen a varios grupos étnicos. (3) Podría argumentarse que las exhibiciones no son una «gran amenaza». Se podría argumentar también

que no son un despilfarro, mencionando beneficios tales como el ocio, la ayuda al reclutamiento de gente para las Fuerzas Aéreas, etc. (5) Se podría argumentar la posición victoriana de que la conducta sugerente sí importa, pero si esta posición le resulta repugnante, hay una alternativa. No está claro en la carta si Souter tenía otra alternativa diferente a la que tomó. Se puede observar que el argumento dispensa la cuestión. Una vez que la acusación es desestimada, es engañoso llamar al acusado un violador. No tenemos delante la Constitución del estado de New Hampshire, pero los jueces del Tribunal Supremo del estado deben respetarla. Posiblemente esto presionó a Souter en este caso. (7) Se podría argumentar que la evidencia presentada no significa que la guerra es exclusivamente por el petróleo; podría haber otros factores que contribuyesen. Ciertamente, la crueldad de la invasión jugó un papel importante para convencer a mucha gente del Gobierno de la necesidad de intervenir. Otros factores, tales como nuestro papel de liderazgo o el miedo a otra posible guerra nuclear, podrían ser pertinentes también. En cuanto al motivo económico, se podría argumentar que a menos que nos enfrentemos a Sadam Hussein, éste podría controlar, no sólo el petróleo de Kuwait, sino también el Saudí, y con el tiempo, todo el petróleo del Golfo. El trastorno económico que esto podría causar sólo en los Estados Unidos sería muy grande.

3. Se podría argumentar que algunos intentos por limitar el consumo de droga han tenido éxito. Se podría argumentar que la legalización aumentará el consumo de droga. Se podría argumentar que a pesar del aliciente de los beneficios, el Gobierno no debería aprovecharse de las debilidades y pecados de algunos ciudadanos. Por supuesto que se requeriría evidencia para apoyar tales afirmaciones. ¿Ha hecho algo el establecimiento de loterías del Estado por los adictos a las apuestas? Finalmente, se podría argumentar que es responsabilidad del Gobierno proteger a los cuidadanos frente a cualquier daño que se puedan hacer ellos mismos. Por ejemplo, muchos estados obligan a que se lleve puesto el cinturón de seguridad.
5. Puede haber dos «argumentos». (1) Claramente, [la Sota lo escribió] ⇒ [la Sota imitó la letra de otra persona], pero esto no implica que [la Sota lo escribió] (compruebe la tabla de verdad). (2) De nuevo, ([la Sota lo escribió] & [la Sota no lo firmó]) ⇒ [la intención de la Sota debía ser mala] es verdadero, y [la Sota no lo firmó] es también verdadero, pero éstos no implican que [la Sota lo escribió] (compruebe la tabla de verdad).

CÓMO ESCRIBIR ARGUMENTOS (PÁG. 162)

Es conveniente trabajar en parejas en este ejercicio, de forma que cada uno escribe un argumento desde los dos puntos de vista, y a continuación cada uno de ellos critica los argumentos del otro como en «La crítica de argumentos», destacando las premisas débiles y las conexiones débiles. Finalmente, los autores originales reescriben los argumentos.

UN BUEN PÁRRAFO (PÁG. 165)

Por supuesto, lo que pretendemos en el ejercicio 3 y en el 4 es elegir una columna *diferente* u otro símbolo a examinar. Lógicamente, sin embargo, un estudiante perezoso y/o calculador podría simplemente copiar su respuesta del ejercicio 2. El profesor honesto y concienzudo le dará una buena nota, pero, calladamente, maldecirá a los autores por haber permitido tal desatino.

CATHY VA A LA GUERRA (PÁG. 169)

La cita del principio de la sección es del clásico del cine *El tercer hombre*. El guión era de Graham Greene, pero esta línea la escribió Orson Welles, quien hizo el papel de Harry Lime, el personaje que la dice.

EJERCICIOS

1. Algunas pistas: (1) Argumente que los beneficios económicos de la guerra se pueden duplicar en tiempo de paz. (2) Argumente que la pérdida de vidas y de capacidad productiva causadas por la guerra son negativas desde el punto de vista económico. (3) Argumente que es malo matar a la gente.

Éste es sólo el principio. Haga lo que haga, sin embargo, usted debe destacar la falacia lógica de las dos últimas líneas de Cathy. En Proposicional, formalizaríamos esto como:

$$\text{monumento} \Rightarrow \text{héroe},\ \neg\ \text{monumento} \therefore \text{inútil}.$$

Claramente, esto no es válido. Si añadimos la premisa no pronunciada pero implicada $\neg$héroe $\Rightarrow$ inútil, sigue siendo no válido. ¿Cómo destacamos esto en un debate en castellano? Es un poco difícil sacar a la luz a Proposicional si su oponente no conoce las tablas de verdad. El mejor método consiste en utilizar una analogía. Muestre que la estructura argumental no es válida construyendo un argumento análogo donde esté más claro el absurdo. Por ejemplo, podría decir: «¡Si ese razonamiento es correcto, entonces yo podría argumentar que el sol no se pondrá esta noche! Así: estarás de acuerdo en que, si compro un helado caliente, entonces con seguridad que el sol se pondrá esta noche. Bien, pues no voy a comprar un helado caliente, de modo que según ese razonamiento, ¡el sol no se pondrá!»

Curiosidades y rompecabezas

The Digestor's Digest, PÁG. 3 (PÁG. 170)

Si al lector le gustan este tipo de rompecabezas, debería mirar alguno de los libros de Raymond Smullyan, cuyos rompecabezas sobre caballeros (que dicen siempre la verdad) y sotas (que siempre mienten) los inspiró. Su primer libro, *What is the Name of this Book? (¿Cuál es el nombre de este libro?)* (Prentice-Hall, 1978), es un clásico.

REUNIÓN FAMILIAR (PÁG. 171)

El diagrama que hay en este capítulo es muy útil para organizar la información que le dan. Por ejemplo, le dicen que su sobrino no es quien no le invitó a su boda. Encuentre la casilla correspondiente a «sobrino» y «boda» y ponga una X en ella. De forma similar, ponga tantas pistas como pueda en la tabla. Sírvase del hecho de que por cada elemento debe haber exactamente una categoría que le corresponda (y viceversa). Por ejemplo, a «Harvard» le corresponde exactamente uno de los elementos {sobrino, tío, primo, primastro, ?}, es decir, exactamente cuatro de las casillas de la columna de «Harvard» opuestas a esta categoría estarán tachadas con una X, y una de ellas estará seleccionada.

RESPUESTA

Edgar le pidió dinero prestado. No podemos saber cuál es el parentesco que tiene con usted.
Edwin va a Harvard. Él es su primo.
Eduardo vive con una ex monja. Él es su sobrino.
Edsel está enfadado con usted porque usted le hizo meterse en un lío con Edwin. Él es su primastro.
El «loco» Eddie no le invitó a su boda. Él es su tío.

LÓGICA PUNK (PÁG. 173)

Laura Logic era el nombre artístico de la saxofonista de punk-rock Susan Whitby del grupo «X-Ray Specs». La fotografía es de Erica Echenberg/Redferns.

La fantástica aventura de Tom y Jim

17 de noviembre

Un ejemplo de condicional contrafactual es el siguiente: «Si Dukakis hubiera ganado en 1998, entonces Dan Quayle hubiera sido vicepresidente.» Normalmente, la consideraríamos una oración del tipo si-entonces, $P \Rightarrow Q$. La P aquí es falsa y la Q es verdadera, de modo que por convenio, diríamos que la oración es verdadera. Por otra parte, no parece que esto capture el sentido real de la oración. Para alguno que no haya cursado un semestre de lógica, esta frase tiene algo fundamentalmente erróneo. El sentido común nos diría que si Dukakis hubiera ganado, Lloyd Bentsen hubiera sido vicepresidente, y no Quayle.

La oración no puede entenderse adecuadamente sin considerar universos alternativos: mundos en los que P («Dukakis gana») es verdadero. Jim 1 le pregunta a Jim 2 quién ganó en 1998 en este universo. Jim 2 dice Bush. Jim 1 sugiere utilizar la máquina del tiempo para buscar más universos alternativos, esperando encontrar uno en donde Dukakis gane. Tom 1 y Tom 2 creen que esto es peligrosamente estúpido. Si usted está de acuerdo con Jim 1, vaya a la página 528, si usted está empantanado vaya a la página 497.

5. PREDICADOS, PROGRAMAS Y LÓGICA ANTIGUA

Lógica formal: Lógica de predicados

LENGUAJES DE PREDICADOS (PÁG. 175)

EJERCICIO 1. a, c, g (y no necesita aparecer dentro), h. No e, porque a no es una variable.

EJERCICIO 2. a. $(\exists w\underline{Fw} \vee \exists w\underline{Fw})$ c. $Rya \,\&\, \forall y\underline{Gy}$ e. $\forall x\forall y\underline{((Rxy \,\&\, Fz) \Rightarrow \exists z\underline{\underline{Rxz}})}$

EJERCICIO 3. a. abierta, y libre en Gy b. cerrada c. abierta, x libre d. abierta, z libre

EJERCICIO 4

1. (a) Rty (b) $(\forall xRxy \Rightarrow Ft)$ (c) $t = t$
2. (a) Rtz (b) $\exists yRty$ (c) Aquí no se puede sustituir la variable libre y por z

VARIACIONES SOBRE EL TEMA DE LOS LENGUAJES DE PREDICADOS (PÁG. 180)

EJERCICIO. b, c, d, e

DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL A LA LÓGICA DE PREDICADOS (PÁG. 183)

RETO

1. $(Fa \vee Ga)$ & $(Fb \vee Gb)$ & $(Fc \vee Gc)$ versus $(Fa$ & Fb & $Fc) \vee (Ga$ & Gb & $Gc)$. La segunda implica la primera, pero no a la inversa. Suponga, por ejemplo, que F es verdadera sólo para a, y G es verdadera sólo para b y c. Entonces, la primera es verdadera, pero la segunda es falsa.
3. La primera dice que nada cumple F: $\neg Fa$ & $\neg Fb$ & $\neg Fc$. La segunda dice que no es verdadero que F se cumpla para todo: $\neg(Fa$ & Fb & $Fc)$. La primera implica la segunda, pero no a la inversa. Suponga, por ejemplo, que se cumple Fa, Fb y $\neg Fc$. Entonces, la segunda es verdadera, pero no la primera.
5. La primera dice que todo cumple las propiedades H y J: $(Ha$ & $Ja)$ & $(Hb$ & $Jb)$ & $(Hc$ & $Jc)$. La segunda dice que todo cumple la propiedad H y todo cumple la propiedad J: $(Ha$ & Hb & $Hc)$ & $(Ja$ & Jb & $Jc)$. Éstas son equivalentes.
7. La primera dice que P implica que todo cumple F: $P \Rightarrow (Fa$ & Fb & $Fc)$. La segunda dice que para todo objeto en el universo, P implica que ese objeto tiene la propiedad F: $(P \Rightarrow Fa)$ & $(P \Rightarrow Fb)$ & $(P \Rightarrow Fc)$. Éstas son equivalentes.
9. La primera dice que para cada objeto se verifica que éste está relacionado según R con todos los objetos: $(Raa$ & Rab & $Rac)$ & $(Rba$ & Rbb & $Rbc)$ & $(Rca$ & Rcb & $Rcc)$. La segunda dice que para cada objeto, todos los objetos están relacionados con él según R: $(Raa$ & Rba & $Rca)$ & $(Rab$ & Rbb & $Rcb)$ & $(Rac$ & Rbc & $Rcc)$. Éstas son equivalentes.
11. La primera dice que para cada objeto se verifica que éste está relacionado según R con algún objeto: $(Raa \vee Rab \vee Rac)$ & $(Rba \vee Rbb \vee Rbc)$ & $(Rca \vee Rcb \vee Rcc)$. La segunda dice que hay algún objeto tal que, todos los objetos están relacionados con él según R: $(Raa$ & Rba & $Rca) \vee (Rab$ & Rbb & $Rcb) \vee (Rac$ & Rbc & $Rcc)$. La segunda implica la primera, pero no a la inversa. Suponga, por ejemplo, que la relación Rxy se interpreta como «x no es lo mismo que y». Entonces, la primera sería verdadera y la segunda falsa en un universo con más de un objeto. •

LA INTERPRETACIÓN DE LA LÓGICA DE PREDICADOS (PÁG. 186)

RETO 1. S hace verdadera $A \vee B$ si y sólo si S hace verdadera A o S hace verdadera B. S hace verdadera $A \Leftrightarrow B$ si y sólo si S hace a ambas, A y B, verdaderas o S hace a ambas, A y B, falsas. •

RETO 2. S hace verdadera $\forall x Ax$ si y sólo si S hace verdadera Ax para cada objeto x en el universo del discurso. •

RETO 3

1. En S2, se convierte en $\exists x(x \geq 0 \,\&\, x \neq 0)$ o «algún número natural es mayor o igual que 0 y distinto a 0». Esto es verdadero. En S3, se convierte en $\exists x(x \geq -1 \& x \neq -1)$ o «algún entero negativo es mayor o igual que -1 y distinto de -1». Esto es falso. En S4, se convierte en $\exists x(x \leq 0 \,\&\, x \neq 0)$ o «algún entero es menor o igual que 0 y distinto de 0». Esto es verdadero.
3. En S1, se convierte en $\forall y(y \leq 0 \vee \neg y \leq 0)$ o «todo número natural o es menor o igual que 0 o no es menor o igual que cero». Esto es verdadero. En S2, se convierte en $\forall y(y \geq 0 \vee \neg y \geq 0)$ o «todo número natural o es mayor o igual que 0 o no es mayor o igual que 0». Esto es verdadero. En S3, se convierte en $\forall y(y \geq -1 \vee \neg y \geq -1)$ o «todo número negativo o es mayor o igual que -1 o no es mayor o igual que -1». Esto es verdadero. En S4, se convierte en $\forall y(y \leq 0 \vee \neg y \leq 0)$ o «todo entero o es menor o igual que 0 o no es menor o igual que 0». Esto es verdadero. •

RETO 4. Una estructura en la que esta afirmación es falsa: el dominio de los seres humanos, Fx significa «x nació antes de 1990», Gx significa «x nació después de 1990». Una estructura en la que esta afirmación es verdadera: el dominio de los seres humanos, Fx significa «x nació antes de 1990», Gx significa «x es un hombre». •

TEORÍA DE LA LÓGICA DE PREDICADOS (PÁG. 191)

Compare esta sección con «La Teoría de la Lógica Proposicional», en el capítulo 3. Compare también las respuestas a los retos.

RETO 1. (Nota: Estas respuestas serían las mismas en lógica de predicados).

1. no necesariamente
3. inconsistente
5. sólo esa no es válida
7. porque una afirmación falsa implica cualquier afirmación •

RETO 2

1. Si A es verdadera, entonces como A implica B, B tiene que ser verdadera. Si A es falsa, entonces B no puede ser verdadera (o si no A sería verdadera porque B implica A), y por tanto B es falsa.
3. En cualquier estructura, o ambas, A y B, son verdaderas o ambas son falsas (ya que A es equivalente a B). En los dos casos, $A \Leftrightarrow B$ es verdadera. Por tanto, $A \Leftrightarrow B$ es válida. A la inversa, si $A \Leftrightarrow B$ es válida, entonces A y B deben tener las mismas tablas de verdad en cualquier estructura, y por tanto A y B son equivalentes. •

RETO 3

1. Suponga que A, B y C implican D. Si $(A \,\&\, B \,\&\, C)$ es verdadera en una estructura, entonces cada una de ellas, A, B y C, deben ser verdaderas en esa estructura, y por tanto D es verdadera en la estructura. Así, $(A\&B\&C)$ implica D. Ahora suponga que $(A \,\&\, B \,\&\, C)$ implica D. Entonces, si cada una de ellas, A, B y C, son verdaderas en una estructura, $(A\&B\&C)$ es verdadera en la estructura y por tanto D es verdadera en la estructura. Así, A, B y C implican D. •

Las leyes lógicas: fórmulas válidas e implicaciones básicas (pág. 194)

Reto 1. Si todo no cumple W, entonces no todo cumple W. Considere el dominio de todos los seres humanos, y sea Wy «y nació en Wisconsin». •

Reto 2. Se deduce de observar que $A \Leftrightarrow \neg B$ y $\neg A \Leftrightarrow B$ tienen las mismas tablas de verdad. Hay otras formas de demostrar esto. •

Reto 3. Si todo cumple W o todo cumple S, entonces todo cumple W o S. Si todo cumple o W o S, entonces o todo cumple W o todo cumple S. Considere el dominio de todos los seres humanos, y sea Wx «x es una mujer» y Sx «x es un hombre». •

Reto 4. Si todo lo que cumple W, cumple S, entonces, si algo cumple W, algo cumple S. En cualquier estructura en la que todo lo que cumple W, cumple S, si algo cumple W, ese objeto también cumple S, y por tanto algún objeto cumple S. •

Reto 5. Considere el dominio de todos los seres humanos, donde Wx significa «x escribió bajo el seudónimo «Saki» » y Sy significa «y florece a principios de abril y produce pequeñas y brillantes bayas rojas en agosto». Observe que $\exists yWy \Rightarrow \exists ySy$ es falsa (H. H. Munro escribió bajo el seudónimo «Saki», ningún ser humano florece y produce bayas), pero que $\exists y(Wy \Rightarrow Sy)$ es verdadera (sea y «Madonna»). •

Formulación en lógica de predicados (pág. 198)

Reto 1

1. $Fs, c = s \therefore Fc$; válida.
2. La formulación más obvia: $m = n, Un \therefore Um$; válida. Sin embargo, esto es de algún modo insatisfactorio. Mientras que el argumento es lógicamente válido, las premisas son verdaderas y la conclusión se puede afirmar que es falsa. Quizás «es desconocida» en realidad no es una propiedad de una persona, sino una relación entre una persona y un nombre. Entonces, una misma persona podría ser muy conocida por un nombre y desconocida por otro nombre (Jesse James, Mr. Howard). •

Ejercicio 1. 1. de igualdad 2. de predicado 3. de tiempo 4. de existencia

Reto 2. Si Df es verdadera en una estructura, entonces debe haber algún objeto en el domino igual a f, este objeto tendrá la propiedad D, y por tanto $\exists x(Dx \,\&\, f = x)$. De forma similar, si $\exists x(Dx \,\&\, f = x)$ es verdadera en una estructura, entonces debe existir algún objeto en el dominio con la propiedad D que es igual al objeto llamado f, por lo que f tiene la propiedad D. •

Reto 3

1. $\forall x(Mx \Rightarrow Dx), Ms \therefore Ds$; válida.
3. $\forall x(Sx \Rightarrow Bx), \exists x\neg Sx \therefore \exists x\neg Bx$; no válida. Considere el dominio de todos los seres humanos, siendo Sx «x es un inspector fiscal» y Bx «x es un ser humano».
5. $\forall x\neg(c > x), \forall x\neg(x > p) \therefore c > p$ donde c es espaguetis fríos y p es paz y libertad. •

EJERCICIO 2. Principio de sustitución. Las tablas de verdad de $A \Rightarrow B$ y $\neg A \vee B$ son las mismas.

RETO 4

1. Por (IC2), $\neg\exists x(Ax \,\&\, Bx)$ es equivalente a $\forall x\neg(Ax \,\&\, Bx)$. Entonces, observe que $\neg(A \,\&\, B)$ tiene la misma tabla de verdad que $A \Rightarrow \neg B$. Por tanto, por el principio de sustitución, $\forall x\neg(Ax \,\&\, Bx)$ es equivalente a $\forall x(Ax \Rightarrow \neg Bx)$. •

RETO 5. $\exists x\forall y(Sxy \Leftrightarrow \neg Syy)$ Ésta es contradictoria. •

EJERCICIO 3

1. $\forall x(Wx \Rightarrow Sx)$, $\exists x(Px \,\&\, Wx) \therefore \exists x(Px \,\&\, Sx)$; válida
3. $\forall x(Bx \Rightarrow \forall y\neg Mxy)$, $\exists x(Mjx \,\&\, Fx) \therefore \neg Bj$; válida
4. Ésta es complicada. El argumento es intuitivamente válido, pero no con la estructura $\forall x(Cx \Rightarrow Hx) \therefore \forall x(Tx \Rightarrow Sx)$. La formulación correcta es $\forall x(Cx \Rightarrow Hx) \therefore \forall x(\exists y(Txy \,\&\, Cy) \Rightarrow \exists y(Txy \,\&\, Hy))$.

RETO 6

1. $\forall xBx, \forall xBx, \exists xBx$
2. $\neg\forall xBx, \neg\exists xBx$ (o $\forall x\neg Bx$), $\neg\exists xBx$
3. $\forall xBx \Rightarrow Bf, \exists xBx \Rightarrow Bf$ (o $\forall x(Bx \Rightarrow Bf)$), $\exists xBx \Rightarrow Bf$ •

POLACOS Y NORUEGOS (PÁG. 207)

EJERCICIO

1. $\forall x(Nx \Rightarrow Sx)$
3. $\exists xHxb$
5. $\forall x(Nx \Rightarrow Hxb)$
7. $\forall x((Nx \,\&\, Sx) \Rightarrow \exists y(Hxy \,\&\, Py))$
9. $\exists x((Sx \,\&\, Px)\&$ $\forall y((Sy \,\&\, Ny \,\&\, Hyb) \Rightarrow Hxy))$
11. $\neg\exists x(Nx \,\&\, Sx)$
13. $\exists xHxb \Rightarrow Hbb$
15. $\exists x\forall yHxy \,\&\, \exists x\forall yHyx$

Por supuesto, hay varias formas de hacer esto.

Cerca y Acerca de la lógica

JUEGOS (PÁG. 208)

El juego de las reinas lo inventaron por separado W. A. Wythoff (1907) y Rufus P. Isaacs (1960). Un análisis riguroso lleva a los números de Fibonacci y la proporción áurea. Vea *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers* de Martin Gardner, W. H. Freeman, 1989.

EJERCICIO

1. Jugador 2. Ésta es la imagen refleja del ejemplo del texto.
3. Jugador 1. Se puede mover directamente a la esquina superior izquierda.
5. Jugador 1. Se puede mover a la casilla g, y después es como el ejemplo del texto.

a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*

7. Jugador 1. Éste es como el problema 5.
9. Jugador 1. Éste es nuevamente como el problema 5. El primer jugador puede mover a la casilla de la tercera columna, segunda fila.
11. Bueno, éste es un poco más difícil. Hay una bonita forma de responder todas estas preguntas de una vez. Dibuje un rectángulo enorme. Entonces, empiece en la esquina superior izquierda, rellene las casillas con un «1» o un «2», dependiendo de qué jugador tiene una estrategia ganadora empezando en esa casilla. Empezamos así:

2	1	1	1	1	1
1	1	2			
1	2				
1					
1					
1					

En cada nueva casilla, pregúntese, «¿puedo alcanzar desde aquí una casilla 2?». Si puede, etiquétela con «1». Si no puede, etiquétela con «2». Por ejemplo, todas éstas son 1:

2	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1
1	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1
1	1	1		1	1

La figura tiene sentido, porque estando en uno de esos cuadrados, puede moverse a un cuadrado 2, donde el oponente no podrá ganar. Ahora encontramos dos 2:

2	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2		
1	1	1	1	1	1		
1	1	1	2	1	1	1	
1	1	1			1	1	1
1	1	1				1	1

y así sucesivamente:

2	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	2	1	1	1

BASIC (PÁG. 211)

EJERCICIOS

1. Escribe 32. Escribe 8. Escribe 128. Si damos cualquier número n, escribirá 2^n.
3. Escribe 120. Escribe 6. Escribe 5040. Si damos cualquier número n, escribirá el producto de todos los números desde 1 hasta n (también llamado «n-factorial» o $n!$).

EN BINARIO (PÁG. 215)

EJERCICIOS. 1. 5 3. 45 5. 11 7. 1001 9. 1101 11. 100011 13. 1001011 15. 4 17. 35 19. 47 21. 1 23. 48

TRIVIAL (PÁG. 218)

EJERCICIOS

1. Este programa coge lo que sea X, lo multiplica por dos, y da su valor a Y. Hace esto restando de forma repetida 1 de X y sumando 2 a Y.

3. Este programa computa X veces 2^Y. Hay un bucle gigante que el programa recorre exactamente Y veces:

```
30 IF Y = 0 THEN GOTO 150
⋮
130 IF Y > 0 THEN LET Y = Y – 1
140 GOTO 30
150 STOP
```

Dentro de este bucle, el programa primero multiplica X por dos y pone el resultado en W:

```
40 IF X = 0 THEN GOTO 90
50 LET W = W + 1
60 LET W = W + 1
70 IF X > 0 THEN LET X = X – 1
80 GOTO 40
```

Después vuelve a poner el resultado en X:

```
90 IF W = 0 THEN GOTO 130
100 IF W > 0 THEN LET W = W – 1
110 LET X = X + 1
120 GOTO 90
```

El resultado es el que se obtiene de coger X y multiplicarla por 2 un número total de veces igual a Y, o $X2^Y$.

ALGORITMO (PÁG. 220)

Una demostración de que hay un conjunto de números naturales que es no decidible es la siguiente:

Coja todos los programas BASIC y numérelos en orden alfabético. Esto asigna a cada programa una clase de número ID. Vamos a definir un conjunto no computable, que llamaremos L. Dado un número natural n, ésta será la forma de decidir si n está o no en L: cogemos el n-ésimo programa y lo ejecutamos. Si nos pide un número como entrada, le damos n. Si el programa para y dice no, entonces diremos que n está en L, en caso contrario (si el programa dice sí o no para), diremos que n no está en L.

Observe que mientras que todo algoritmo tendrá un programa que lo implemente (de hecho, muchos), lo inverso no es verdadero, ya que un gran número de programas no terminan (tienen un bucle infinito) —y según nuestra definición, los algoritmos han de terminar. Un ejemplo en BASIC es

```
10 GOTO 10
```

En cualquier caso, nuestro conjunto L es absolutamente extraño. ¿Es computable? Si lo es, entonces algún programa lo computa, y ese programa tiene un número ID. Digamos que es el programa número 34.788.254. Pero entonces preguntamos, ¿está 34.788.254 en L? Bueno, ¿cómo podemos saberlo? Ejecutamos el programa número 34.788.254. ¿Qué es lo que dice? Si dice no, entonces 34.788.254 está en L — ¡pero entonces el programa número 34.788.254 no vale para computar L, puesto que dice no! Bien, quizás dice sí. Entonces el número 34.788.254 no está en L — ¡pero entonces otra vez, el programa número 34.788.254 no vale para computar L porque dice sí!

Esto demuestra que el programa número 34.788.254 no computa L. Un argumento similar demuestra que el programa número 6.420.495.872.333 tampoco computa L, etc. Ningún programa computa L, y por tanto, ¡L no es computable!

Usted se puede estar preguntando: decimos que L no es computable, pero parece que realmente hemos definido un algoritmo para decidir si un número está o no en L. Todo lo que hacemos es ejecutar el n-ésimo programa, dar n como entrada, y esperar el resultado. ¿No computa esto L?

No lo hace y éste es el por qué: el n-ésimo programa podría no terminar. Podría tener un bucle infinito. En ese caso, n no estaría en L, pero ¿cómo lo sabremos? Nosotros estamos esperando que el programa pare. Y el programa no para. ¿Cuándo vamos a dejar de esperar? El procedimiento no es un algoritmo porque no incluye ningún modo de decidir en un número finito de pasos si n está o no en L.

Pero nuestro programa sería un algoritmo si hubiese un algoritmo para decidir cuándo un programa tiene un bucle infinito. Esto se denomina «el problema de la parada», y tiene una gran importancia histórica, matemática y filosófica. Esencialmente, lo que hemos demostrado es que el problema de la parada no tiene algoritmo, porque si lo tuviese, L sería computable, pero L no es computable.

La fantástica aventura de Tom y Jim

17 de noviembre

Jim entra en la máquina. Tom pone un día del futuro en el marcador y pulsa el botón. Abre la puerta y Jim sale.

—¿Qué día es? —pregunta Tom.

—18 de noviembre —contesta Jim. Entonces describe sus recuerdos de las últimas veinticuatro horas. Dice que ellos probaron la Infundíbula, pero que no funcionó. Recuerda intercambiar silogismos con Tom durante unas pocas horas, y después ir a ver *Regreso al Futuro, Parte XVII*. Se dan cuenta de que sus recuerdos son de su pasado pero no necesariamente del futuro de Tom.

Esto tiene sentido para Tom —*tenía* que ser de esta manera.

—Tú eres de un universo distinto! —dice él—. Si hubiese sólo un universo y sólo un Jim, ¡tú serías ahora un día más viejo que tú mismo! Tú todavía no has visto tu futuro.

Vaya a la página 550.

El castor afanoso (pág. 222)

De hecho, lo puede hacer mejor. Lo primero de todo, puede mejorar el último programa aumentando el número de líneas que son «LET Y = Y + 1» y disminuyendo el número de las que son «LET X = X + 1». El programa básicamente multiplica 3 veces 12. Cambiando las proporciones, podemos multiplicar 7 veces 8 para obtener 56:

$$\begin{array}{l} y = y + 8 \\ y = y - 1 \\ \text{if } y = 0 \\ x = x + 8 \\ \text{stop} \end{array}$$

Otro cambio sencillo es mover la línea «$y = y - 1$». Esto aumenta el total a 8 veces 8, o 64:

$$\begin{aligned} &y = y + 8 \\ &\text{if } y = 0 \\ &x = x + 8 \\ &y = y - 1 \\ &\bullet \\ &\text{stop} \end{aligned}$$

Y otro cambio simple nos lleva a 9 veces 8:

$$\begin{aligned} &y = y + 8 \\ &x = x + 8 \\ &\text{if } y = 0 \\ &y = y - 1 \\ &\bullet \\ &\text{stop} \end{aligned}$$

En realidad, esto sólo araña la superficie. Podemos obtener resultados astronómicamente mayores con un simple mecanismo que dobla el tamaño de X:

$$\begin{aligned} &\text{if } x = 0 \\ &x = x - 1 \\ &y = y + 2 \\ &\bullet \\ &\text{if } y = 0 \\ &y = y - 1 \\ &x = x + 1 \\ &\bullet \end{aligned}$$

Compare esto con el ejercicio 3 en «TRIVIAL». Podemos incorporar esto en un programa de la forma siguiente

$$x = x + 1$$
$$z = z + 6$$
$$\text{if } x = 0$$
$$x = x - 1$$
$$y = y - 2$$
$$\text{if } y = 0$$
$$y = y - 1$$
$$x = x + 1$$
$$\text{if } z = 0$$
$$z = z - 1$$
$$\text{stop}$$

¡Que nos da 128! Puede obtenerse mucho más. ¡Inténtelo!

Nota: Aquí hay un problema interesante. Claramente, hay una respuesta mejor a esta pregunta, pero esa respuesta no se conoce. Si limitamos el número de pasos del programa a un número muy pequeño, como 3, entonces podemos encontrar la mejor respuesta sin demasiados problemas. Bien, entonces, ¿hay algún método sistemático para encontrar la mejor respuesta para programas con un número mayor de pasos? Por «método sistemático», entienda un «método que un computador puede llevar a cabo».

La fantástica aventura de Tom y Jim

¿? de noviembre

Las dos parejas se metieron en sus máquinas del tiempo, revisaron los motores y despegaron. Nuestros Tom y Jim originales, yendo hacia atrás y hacia delante, visitaron universo tras universo. Nunca viajaron más de un día de una vez, en cada dirección. Algunas veces no encontraban a ningún otro Tom o Jim, y otras encontraban a muchos.

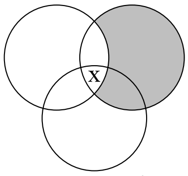
Finalmente aterrizaron en un universo donde Dukakis había ganado la presidencia en 1988. Para su sorpresa, ¡Quayle era su vicepresidente! Se ve que en este mundo Quayle era un demócrata. Aparte de esto, Quayle no presenta ninguna otra diferencia.

Ahora Tom ha engordado. La máquina del tiempo no tiene potencia. Ultimamente, los universos que visitan están llenos de Toms y Jims. No hay sitio en esta casa, y cada hora llegan más Toms. Los vecinos están haciendo preguntas.

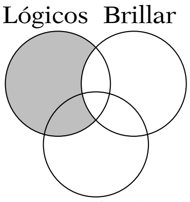
RETO. Escriba un final satisfactorio, lógicamente consistente para esta aventura. •

Lógica informal

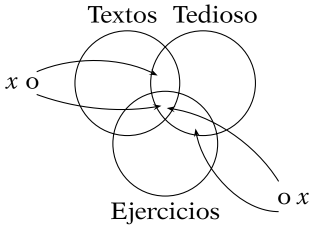
SILOGISMOS (PÁG. 224)



1. a. Válida
   b. $\forall x(RDx \Rightarrow RMx)$
   $\exists x(Ix \mathbin{\&} RDx)$
   $\therefore \exists x(Ix \mathbin{\&} RMx)$
3. a. No válida



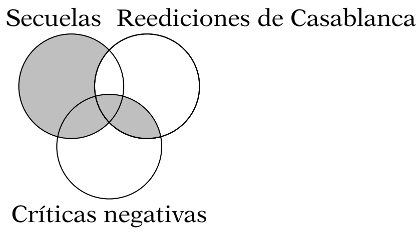
   b. $\forall x(Lx \Rightarrow Gx)$
   $\exists x(Lx \mathbin{\&} \neg Cx)$
   $\therefore \exists x(Cx \mathbin{\&} \neg Gx)$
   d. Suponga que no hay objetos x tales que se cumpla Cx, por ejemplo, que nuestro universo es el de los estudiantes en el Colegio Sofista y Cx significa «x tiene 4 años». Suponga que Lx significa «x es un estudiante de primer año», y Gx significa «x almuerza en el comedor». Entonces, las premisas podrían ser verdaderas, pero la conclusión es falsa (en nuestro universo).
5. a. No válida



   b. $\exists x(Tx \mathbin{\&} TDx)$
   $\exists x(TDx \mathbin{\&} Ex)$
   $\therefore \exists x(Tx \mathbin{\&} Ex)$

d. Suponga que nuestro universo es la colección de todos los libros. Sea Tx «x fue escrito antes de 1700». Sea TDx «x ha aparecido encuadernado» y sea Ex «x fue escrito después de 1950».

7. a. No válido



b. $\forall x(Mx \Rightarrow Bx)$
$\forall x(Bx \Rightarrow \neg Cx)$
$\therefore \exists x(Mx \mathbin{\&} \neg Cx)$

d. Suponga que nuestro universo consiste en todos los meses del año. Sea Mx «x empieza con la letra «z» » (sabemos que no hay ninguno), sea Bx «x termina con la letra «l» », y sea Cx «x es un mes de invierno».

La fantástica aventura de Tom y Jim

15 de noviembre

Jim planea ir un día hacia atrás en el pasado. Para asegurarse de que no va a volver a hacer esto una y otra vez por siempre, escribe una nota para sí mismo diciendo, «El 15 de noviembre, yo, James Henle, me envié al pasado. Si tú, James Henle, lees esto y no recuerdas este suceso, ¡no vuelvas a ir al pasado!». Sella un sobre dirigido a sí mismo con la nota y lo deja sobre su escritorio.

Jim le dice a Tom lo que está haciendo. Tom piensa nuevamente que esto es una tontería, pero no está seguro de por qué. Si usted está de acuerdo con Tom, vaya a la página 533. Si quiere probar el experimento, vaya a la página 579.

FALACIAS (PÁG. 227)

La taxonomía de falacias incluidas en este capítulo se ha tomado de la undécima edición de la *Enciclopedia británica*. Esta edición a menudo es considerada la más erudita y se paga muy cara en ventas de libros de segunda mano. Muchos de los artículos individuales los escribieron distinguidos académicos. Sin embargo, el artículo sobre la falacia no está firmado.

EJERCICIOS

1. *Ad Hominem*
3. Falacia del Consecuente
5. *Petitio Principii*
7. Anfibología
8. *Petitio Principii no* es $B, \therefore B$. *Petitio Principii* implica añadir la conclusión, B, a la lista de premisas. En *petitio principii* de hecho se está cambiando la argumentación.

LÓGICA RABÍNICA (PÁG. 232)

El estudio de la ley rabínica es extremadamente rico, con conexiones con los pensamientos cristiano e islámico, la teoría legal, la retórica, e incluso la crítica literaria. Un planteamiento adecuado cubriría miles de años de historia intelectual.

Un tema caliente de debate parece ser el grado de influencia de la retórica helenística (p. ej., la lógica silogista; vea «Silogismos» en el capítulo 5) en las leyes rabínicas. A la vista de la falta de semejanza con nuestra lógica; podría no verse ninguna conexión, pero este aspecto no es fácil de resolver.

Los versos del Levítico son más coloristas que los descritos en esta sección. Por ejemplo, este es el 18:17:

> La desnudez de la mujer y de su hija no descubrirás; no tomarás la hija de su hijo, ni la hija de su hija, para descubrir su desnudez; son parientas, es maldad.

Nosotros hemos oído un chiste lógico de judíos. Debería decirse con la inflexión apropiada, de forma pausada, y encogiéndose de hombros; podría no entenderse bien. Podría ser que sólo los autores —o sólo uno de los autores— lo encuentren divertido:

$$\frac{P.}{\text{Por tanto, ¿por qué no } Q\text{?}}$$

Las fuentes consultadas incluyen Louis Jacobs, «Hermeneutics», *The Encyclopedia Judaica*, vol. 8 (Macmillan, 1972), págs. 366-372; Moses Mielziner, *Introduction to the Talmud* (Bloch, 1968 [primera edición, 1894]); David Daube, «Métodos rabínicos de interpretación y retórica helenística», *Hebrew College Annual 22* (1949): 239-264; Herman L. Strack, *Introduction to the Talmud and Midrash* (Harper & Row, 1965, págs. 93-98).

RETO

1. No; no está justificado por el pasaje. La regla IV es aplicable. La frase concreta que dice que el ganado mayor y menor es aceptable, tiene precedencia sobre la general.
2. No. Se aplica la regla IV. La ropa nueva no es similar a los objetos mencionados.
3. No. Nuevamente es aplicable la regla IV. Los ejemplos citados son buey, asno, oveja y vestido, pero una jarra de aceite no está entre ellos.
4. Sí y sí. Se aplica la regla VIII. La regla general de no dejar con vida a hechiceros se ha visto aumentada por la afirmación de que un cierto tipo de hechicero debe ser lapidado. A partir de esto, todos lo hechiceros deben ser lapidados.
5. No. Encontramos éste especialmente difícil. De acuerdo con Moses Mielziner, la regla a aplicar es la VIII. Según Mielziner, el segundo pasaje destaca ciertos objetos que deben ser devueltos y, de alguna manera, implica que estos son objetos cuya propiedad puede ser claramente establecida. La regla VIII se utiliza para concluir que cualquier objeto que vaya a devolverse es algo cuya propiedad puede establecerse claramente. Pensamos que la conclusión opuesta puede obtenerse más fácilmente con la regla V.
6. Sí. Se aplica la regla IV.
7. Sí. Se aplica la regla V. •

CATHY CUESTIONA A DIOS (PÁG. 235)

EJERCICIOS

1. Sea G «Dios existe», sea GP «Dios es bueno y todopoderoso», y sea E «hay maldad en el mundo». Entonces el argumento es:

   $G \Rightarrow GP$
   $(G \,\&\, GP) \Rightarrow \neg E$
   E
   $\therefore \neg G$

   Es válido.
   Nota: Ésta no es la única manera de hacer esto.
3. Un argumento puede ser válido pero incorrecto si una o más de las premisas no es verdadera. Alguien podría atacar virtualmente cualquiera de estas premisas. La primera: se podría argumentar que Dios no es todopoderoso. Algunas religiones sostienen que Dios creó el mundo pero no puede interferir en él. La segunda: se podría argumentar fácilmente que un Dios perfectamente bueno y poderoso aun podría elegir no intervenir.

Esto podría deberse a razones que no comprendemos, o porque la intervención podría dar lugar a mayores maldades, o porque es necesario para las almas de los hombres que sufran y elijan libremente entre la bondad y la maldad. Finalmente, podría argumentarse que la tercera es falsa, que las calamidades enumeradas no son maldades.

Curiosidades y rompecabezas

The Digestor's Digest, PÁGINA 4 (PÁG. 236)

El problema de la página de humor añade un nuevo elemento. Revise la página 1 del *Digest*. ¿Podría ser ésa la página de humor? La primera parte dice que no es un anuncio. ¿Podría ser un artículo? Si lo fuese, entonces como los artículos tienen que ser falsos en la página de humor, la afirmación de que no es un anuncio sería falsa, pero por supuesto, no lo es. ¿Podría ser un anuncio? Si lo fuese, entonces como los anuncios dicen la verdad en la página de humor, la afirmación de que no es un anuncio debería ser verdadera, pero por supuesto, no lo es. Por tanto, la primera parte no puede ser ni un anuncio ni un artículo, por lo que ésa no es la página de humor.

Dejamos al lector que aborde la página 2 del *Digest*, y vamos a considerar ahora la página 3. ¿Podría ser la página de humor? Supongamos que lo es. La segunda parte es contradictoria. Entonces tiene que estar mintiendo, y por tanto es un artículo. Como miente, Chem-treats *es* el cereal de mejor sabor, y por tanto la primera parte también está mintiendo y es un artículo. El lector debería haberse dado cuenta antes de que si no es la página de humor, entonces las dos partes son anuncios. ¿Qué podemos concluir? En este momento, no sabemos si la página 3 es la de humor. No sabemos si cada parte es un anuncio o un artículo. Sin embargo, *sabemos* que ambas están mintiendo, ¡y sabemos que Chem-treats es el cereal de mejor sabor!

EL JUEGO DE LA LÓGICA (PÁG. 237)

El diagrama de este capítulo es de Carroll, de su libro *The Game of Logic*, como se reeditó en *Symbolic Logic*, un libro de los trabajos sobre lógica de Carroll editado con anotaciones y una introducción de William Warren Bartley III (Charles N. Potter, 1977).

EJERCICIO. 1. Inválida 3. Válida

LOS SORITES DE LEWIS CARROLL (PÁG. 241)

Otro interesante libro sobre Carroll es *Lewis Carroll Picture Book*, editado por Stuart Dodgson Collingwood (Unwin, 1899).

EJERCICIO

1. Los cometas no tienen rabos enrollados.
3. Los arcos iris no merecen que se les escriban odas.
5. Ningún novelista londinense es viejo.

La fantástica aventura de Tom y Jim

15 de noviembre

Tom dice que antes de que vaya al pasado, ¡Jim debería mirar si hay una nota! Sorprendido, Jim mira en su escritorio y ve que ¡hay un sobre dirigido a él! Con avidez, lo rompe y lee:

—El 15 de noviembre, yo, James Henle, me envié al pasado. Si tú, James Henle, lees esto y no recuerdas este suceso, ¡no vuelvas a ir al pasado!

—¡Lo ves!, ¡fuiste al pasado y no te acuerdas de ello! —dice Tom. Jim se concentra profundamente.

RETO. Éste es un experimento de viaje en el tiempo que ¡usted mismo puede intentar en casa! Escríbase una nota igual que la que Jim se escribió a sí mismo (por supuesto, ponga su nombre en ella). Métala en un sobre, diríjala a sí mismo, y póngala en su escritorio. Espere 10 minutos y después mire a ver si hay una nota para usted en su escritorio. Si la hay, ¡léala! •

Vaya a la página 558.

6. DEDUCCIÓN, INFINITUD Y UN CORTE DE PELO

Lógica formal: Deducciones

LAS CONECTIVAS PRINCIPALES (PÁG. 247)

EJERCICIO. Casos 1: En el primero estamos aplicando $\exists E$ a $\exists xWx$, donde Wx es $(Ax \mathbin{\&} Bx)$. En el segundo estamos aplicando &I a W, V donde W es $\exists xAx$ y V es $\exists xBx$.

Casos 2: En el primero no hay ningún Wx que pueda servir, ya que la estructura de la premisa no es existencial; es una conjunción. Esto significa que $\exists xAx \mathbin{\&} \exists xBx$ no puede expresarse como $\exists x$(algo). En el segundo, la conclusión no es una conjunción; es un existencial. Es decir, $\exists x(Ax \mathbin{\&} Bx)$ no puede expresarse como (algo) & (algo más).

LA DEDUCCIÓN (PÁG. 249)

EJERCICIO

1.
   1. premisa
   2. premisa
   3. $\vee$I, 2
   4. $\Rightarrow$E, 1, 3

3.
   1. premisa
   2. &E, 1
   3. $\exists$E, 2
   4. &E, 1
   5. ¡Ah!, un intento de usar $\exists$E; pero debe usarse un nombre temporal diferente. ¡Deducción falsa!
   6. &I, 5, 3
   7. $\exists$I, 6 (pero la prueba completa queda invalidada por el paso 5)

5.
   1. premisa
   2. $\forall$E, 1
   3. $\exists$E, 2
   4. ¡Ah!, un intento de usar $\forall$I; pero esto no es posible si la fórmula contiene un nombre temporal diferente. ¡Deducción falsa!
   5. $\exists$I, 4 (pero la prueba completa queda invalidada por el paso 4)

RETO

1.	1.	$P \Rightarrow Q$	premisa
	2.	$Q \Rightarrow R$	premisa
	3.	P	premisa
	4.	Q	$\Rightarrow$E, 1, 3
	5.	R	$\Rightarrow$E, 2, 4
3.	1.	$\forall yFy$	premisa
	2.	Fz	$\forall$E, 1
	3.	$\forall zFz$	$\forall$I, 2

RAZONAMIENTO HIPOTÉTICO: DEDUCCIÓN A PARTIR DE SUPUESTOS (PÁG. 256)

EJERCICIO 1. 1. premisa 2. supuesto 3. supuesto 4. &I, 2, 3 5. $\Rightarrow$E, 4, 1 6. $\Rightarrow$I, 3-5 7. $\Rightarrow$I, 2-6

EJERCICIO 2. 4. &E, 3 5. &E, 3 6. $\exists$I, 4 7. $\Rightarrow$E, 1, 6 8. &I, 5, 7 9. $\Rightarrow$I, 2-9 10. $\neg$I, 9 11. $\neg$E, 10 12. $\forall$I,11

RETO

1.	1.	$\exists z \neg Az$		premisa
	2.	$\neg Ac^*$		$\exists$E, 1
	3.		$\forall z Az$	supuesto
	4.		Ac^*	$\forall$E, 3
	5.		$Ac^* \ \& \ \neg Ac^*$	&I, 2, 4
	6.	$\forall z Az \Rightarrow (Ac^* \ \& \ \neg Ac^*)$		$\Rightarrow$I, 3-5
	7.	$\neg \forall z Az$		$\neg$I, 6
2.	1.	$\forall w \neg Aw$		premisa
	2.		$\exists w Aw$	supuesto
	3.		Ac^*	$\exists$E, 2
	4.		$\neg Ac^*$	$\forall$E, 1
	5.		$Ac^* \ \& \ \neg Ac^*$	&I, 3, 4
	6.	$\exists w Aw \Rightarrow (Ac^* \ \& \ \neg Ac^*)$		$\Rightarrow$I, 2-5
	7.	$\neg \exists w Aw$		$\neg$I,6
3.	1.	$\neg \exists x Ax$		premisa
	2.		Ax	supuesto
	3.		$\exists x Ax$	$\exists$I, 2
	4.		$\exists x Ax \ \& \ \neg \exists x Ax$	&I, 1, 3
	5.	$Ax \Rightarrow (\exists x Ax \ \& \ \neg \exists x Ax)$		$\Rightarrow$I, 2-4
	6.	$\neg Ax$		$\neg$I, 5
	7.	$\forall x \neg Ax$		$\forall$I, 6
4.	1.	$\neg \forall u Au$		premisa
	2.		$\neg \exists u \neg Au$	supuesto
	3.		$\forall u \neg \neg Au$	(por 3, arriba)
	4.		$\neg \neg Au$	$\forall$E, 3
	5.		Au	$\neg$E, 4
	6.		$\forall u Au$	$\forall$I, 5
	7.		$\forall u Au \ \& \ \neg \forall u Au$	&I, 1, 6
	8.	$\neg \exists u \neg Au \Rightarrow (\forall u Au \ \& \ \neg \forall u Au)$		$\Rightarrow$I, 2-7
	9.	$\neg \neg \exists u \neg Au$		$\neg$I, 8
	10.	$\exists u \neg Au$		$\neg$E, 9

•

DEMOSTRACIÓN DE VALIDEZ (PÁG. 261)

Esta sección le debe mucho al excelente libro de Dan Velleman, *How to Prove It* (Cambridge University Press, 1994). Dan es un matemático dedicado a la teoría de conjuntos. Animamos al lector interesado a ver su cuidadosa y completa exposición del arte matemático de la demostración.

EJERCICIO

1.	1.	$\forall x(P \Rightarrow Qx)$	premisa
	2.	$\quad P$	supuesto
	3.	$\quad P \Rightarrow Qx$	$\forall$E, 1
	4.	$\quad Qx$	$\Rightarrow$E, 2, 3
	5.	$\quad \forall xQx$	$\forall$I, 4
	6.	$P \Rightarrow \forall xQx$	$\Rightarrow$I, 2-5
3.	1.	$P \Rightarrow \neg P$	premisa
	2.	$\quad P$	supuesto
	3.	$\quad \neg P$	$\Rightarrow$E, 1, 2
	4.	$\quad P \,\&\, \neg P$	&I, 2, 3
	5.	$P \Rightarrow (P \,\&\, \neg P)$	$\Rightarrow$I, 2-4
	6.	$\neg P$	$\neg$I, 5
5.	1.	$P \Rightarrow \exists xQx$	premisa
	2.	$\quad P$	supuesto
	3.	$\quad \exists xQx$	$\Rightarrow$E, 1, 2
	4.	$\quad Qc^*$	$\exists$E, 3
	5.	$P \Rightarrow Qc^*$	$\Rightarrow$I, 2-4
	6.	$\exists x(P \Rightarrow Qx)$	$\exists$I, 5
7.	1.	$\neg(P \vee Q)$	premisa
	2.	$\quad P$	supuesto
	3.	$\quad P \vee Q$	$\vee$I, 2
	4.	$\quad (P \vee Q) \,\&\, \neg(P \vee Q)$	&I, 1, 3
	5.	$P \Rightarrow (P \vee Q) \,\&\, \neg(P \vee Q)$	$\Rightarrow$I, 2-4
	6.	$\neg P$	$\neg$I, 5
	7.	$\quad Q$	supuesto
	8.	$\quad P \vee Q$	$\vee$I, 7
	9.	$\quad (P \vee Q) \,\&\, \neg(P \vee Q)$	&I, 1, 8
	10.	$Q \Rightarrow (P \vee Q) \,\&\, \neg(P \vee Q)$	$\Rightarrow$I, 7-9
	11.	$\neg Q$	$\neg$I, 10
	12.	$\neg P \,\&\, \neg Q$	&I, 6, 11

9. Resolveremos este problema en detalle. La estrategia de la premisa sugiere demostrar $\exists xPx \Rightarrow$ ____ y $\exists xQx \Rightarrow$ ____, pero no sabemos qué es lo que va en los espacios en blanco

$$
\begin{array}{l}
\exists xPx \vee \exists xQx \\
\qquad \vdots \\
\exists xPx \Rightarrow \underline{\qquad} \\
\qquad \vdots \\
\exists xQx \Rightarrow \underline{\qquad} \\
\qquad \vdots \\
\exists x(Px \vee Qx)
\end{array}
$$

Ciertamente, ayudaría a simplificar las cosas que la conclusión $\exists x(Px \vee Qx)$ pudiese rellenar los blancos. Podemos intentar esto, aunque, desde luego, podría no funcionar. Si no lo hace, simplemente volvemos atrás e intentamos otra cosa.

$$
\begin{array}{l}
\exists xPx \vee \exists xQx \\
\qquad\quad \vdots \\
\exists xPx \Rightarrow \exists x(Px \vee Qx) \\
\qquad\quad \vdots \\
\exists xQx \Rightarrow \exists x(Px \vee Qx) \\
\exists x(Px \vee Qx)
\end{array}
$$

Al aplicar la estrategia de $\Rightarrow$-conclusión a las dos conclusiones se obtiene

$$
\begin{array}{l}
\exists xPx \vee \exists xQx \\
\qquad\quad \exists xPx \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\quad \exists x(Px \vee Qx) \\
\exists xPx \Rightarrow \exists x(Px \vee Qx) \\
\qquad\quad \exists xQx \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\quad \exists x(Px \vee Qx) \\
\exists xQx \Rightarrow \exists x(Px \vee Qx) \\
\exists x(Px \vee Qx)
\end{array}
$$

Ahora, la aplicación de la estrategia de $\exists$-premisa nos da

$$
\begin{array}{l}
\exists xPx \vee \exists xQx \\
\qquad\quad \exists xPx \\
\qquad\quad Pc^* \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\quad \exists x(Px \vee Qx) \\
\exists xPx \Rightarrow \exists x(Px \vee Qx) \\
\qquad\quad \exists xQx \\
\qquad\quad Qd^* \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\quad \exists x(Px \vee Qx) \\
\exists xQx \Rightarrow \exists x(Px \vee Qx) \\
\exists x(Px \vee Qx)
\end{array}
$$

Observe el uso de dos nombres temporales distintos. No podemos asumir que son el mismo. Ahora, aplicamos la estrategia de $\exists$-conclusión:

$$
\begin{array}{l}
\exists xPx \vee \exists xQx \\
\qquad\quad \exists xPx
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & Pc^* \\
 & \quad\vdots \\
 & P\underline{\quad} \vee Q\underline{\quad} \\
 & \exists x(Px \vee Qx) \\
\exists xPx \Rightarrow \exists x(Px \vee Qx) & \\
 & \exists xQx \\
 & Qd^* \\
 & \quad\vdots \\
 & P\underline{\quad}_1 \vee Q\underline{\quad}_1 \\
 & \exists x(Px \vee Qx) \\
\exists xQx \Rightarrow \exists x(Px \vee Qx) & \\
\exists x(Px \vee Qx) &
\end{array}
$$

No sabemos qué hay que poner en $\underline{\quad}$ y $\underline{\quad}_1$, pero de todos modos vamos a seguir adelante. Usamos la estrategia de $\vee$-conclusión; deberíamos intentar demostrar $P\underline{\quad}$ o $Q\underline{\quad}$. Ahora ya vemos qué debería ser $\underline{\quad}$. Éste debería ser c^* y $\underline{\quad}_1$ debería ser d^*.

1.	$\exists xPx \vee \exists xQx$	premisa
2.	$\quad\exists xPx$	supuesto
3.	$\quad Pc^*$	$\exists$E, 2
4.	$\quad Pc^* \vee Qc^*$	$\vee$I, 3
5.	$\quad\exists x(Px \vee Qx)$	$\exists$I, 4
6.	$\exists xPx \Rightarrow \exists x(Px \vee Qx)$	$\Rightarrow$I, 2-5
7.	$\quad\exists xQx$	supuesto
8.	$\quad Qd^*$	$\exists$E, 7
9.	$\quad Pd^* \vee Qd^*$	$\vee$I, 8
10.	$\quad\exists x(Px \vee Qx)$	$\exists$I, 9
11.	$\exists xQx \Rightarrow \exists x(Px \vee Qx)$	$\Rightarrow$I, 7-10
12.	$\exists x(Px \vee Qx)$	$\vee$E, 1, 6, 11

Hemos acabado.

11.

1.	$\quad\neg P \vee P$	supuesto
2.	$\qquad P$	supuesto
3.	$\qquad P \vee \neg P$	$\vee$I, 2
4.	$\qquad (P \vee \neg P) \,\&\, \neg(P \vee \neg P)$	&I, 1, 3
5.	$\quad P \Rightarrow (P \vee \neg P) \,\&\, \neg(P \vee \neg P)$	$\Rightarrow$I, 2-4
6.	$\quad\neg P$	$\neg$I, 5
7.	$\quad P \vee \neg P$	$\vee$I, 6
8.	$\quad (P \vee \neg P) \,\&\, \neg(P \vee \neg P)$	&I, 1, 7
9.	$\neg(P \vee \neg P) \Rightarrow ((P \vee \neg P) \,\&\, \neg(P \vee \neg P))$	$\Rightarrow$I, 1-8
10.	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	$\neg$I, 9
11.	$P \vee \neg P$	$\neg$E, 10

La fantástica aventura de Tom y Jim

18 de noviembre

Nos quedamos con el problema de dos Jim y dos Tom. No pueden quedarse todos —no hay sitio en la facultad. ¿Quién debería irse?

Tom & Jim 1 argumentan que no habría problema si Tom & Jim 2 se fuesen, como habían planeado.

—Hagan lo que hicimos nosotros —le dice Jim1 a Jim 2—. Regresen y corten el pelo de Jim. Si nos atenemos esto, ¡todo el mundo tendrá un hogar!

—Y Jim ya no tendrá pelo —dice Jim 2.

Tom & Jim 2 tienen miedo de que si se van, nunca encuentren un universo que puedan considerar suyo propio. Además, añaden que ellos estaban antes en este universo; es su universo. Le exigen a Tom & Jim 1 que se vayan inmediatamente.

Jim 1 se queja a Jim 2:

—¿Cómo puedes hacerme esto?, ¡soy de tu propia sangre!

RETO. Escriba un final satisfactorio y lógicamente consistente para esta aventura. •

DEMOSTRACIÓN DE INVALIDEZ (PÁG. 267)

EJERCICIOS

1. Válida

1.	$\forall x \neg Fx$	premisa
2.	$\quad\quad \forall x Fx$	supuesto
3.	$\quad\quad Fx$	$\forall$E, 2
4.	$\quad\quad \neg Fx$	$\forall$E, 1
5.	$\quad\quad Fx \;\&\; \neg Fx$	&I, 3, 4
6.	$\forall x Fx \Rightarrow (Fx \;\&\; \neg Fx)$	$\Rightarrow$I, 3-5
7.	$\neg \forall x Fx$	$\neg$I, 6

(Por otra parte, si permitiésemos el universo vacío, este argumento sería inválido. Si el universo es vacío, entonces $\forall x Fx$ y $\forall x \neg Fx$ son ambas verdaderas.)

3. Inválida. Considere el universo de los 50 estados de los Estados Unidos. Sea Fx «x linda con el océano Atlántico», y sea Px «x linda con el océano Pacífico». Sea q un nombre para Kansas.

5. Válida.

1.	$\forall xPx \vee \forall xFx$	premisa
2.	$\quad\forall xPx$	supuesto
3.	$\quad Px$	$\forall$E, 2
4.	$\quad Px \vee Fx$	$\vee$I, 3
5.	$\quad\forall x(Px \vee Fx)$	$\forall$I, 4
6.	$\forall xPx \Rightarrow \forall x(Px \vee Fx)$	$\Rightarrow$I, 2-5
7.	$\quad\forall xFx$	supuesto
8.	$\quad Fx$	$\forall$E, 7
9.	$\quad Px \vee Fx$	$\vee$I, 8
10.	$\quad\forall x(Px \vee Fx)$	$\forall$I, 9
11.	$\forall xFx \Rightarrow \forall x(Px \vee Fx)$	$\Rightarrow$I, 7-10
12.	$\forall x(Px \vee Fx)$	$\vee$E, 1, 6, 11

7. Inválida. Considere el universo de los colegios. Sea Px «x es un colegio femenino», y sea Fx «un nombre de x empieza con «W» ». Debería estar claro que la conclusión es falsa (Colegio Smith, por ejemplo). Observe que la premisa es verdadera porque $\forall xPx$ es falsa (no todo colegio es un colegio femenino).

9. Inválida. Considere el universo de los peces. Sea Px «x es un pez» (por tanto $\forall xPx$). Sea Fx «x mide menos de un metro».

11. Válida. La premisa es $\forall x([Dx \Rightarrow \exists y(Dy \;\&\; Wy)] \Rightarrow Wx)$, Dx significa «usted hace x», y Wx significa «x es moralmente incorrecto». La conclusión es $\forall x(\neg Dx \Rightarrow Wx)$. Aquí tiene una demostración:

1.	$\forall x([Dx \Rightarrow \exists y(Dy \;\&\; Wy)] \Rightarrow Wx)$	premisa
2.	$\quad\neg Dx$	supuesto
3.	$\qquad Dx$	supuesto
4.	$\qquad\quad\neg\exists y(Dy \;\&\; Wy)$	supuesto
5.	$\qquad\quad Dx \;\&\; \neg Dx$	&I, 2, 3
6.	$\qquad\neg\exists y(Dy \;\&\; Wy) \Rightarrow (Dx \;\&\; \neg Dx)$	$\Rightarrow$I, 4-5
7.	$\qquad\neg\neg\exists y(Dy \;\&\; Wy)$	$\neg$I, 6
8.	$\qquad\exists y(Dy \;\&\; Wy)$	$\neg$E, 7
9.	$\quad Dx \Rightarrow \exists y(Dy \;\&\; Wy)$	$\Rightarrow$I, 3-8
10.	$\quad[Dx \Rightarrow \exists y(Dy \;\&\; Wy)] \Rightarrow Wx$	$\forall$E, 1
11.	$\quad Wx$	$\Rightarrow$E, 9, 10
12.	$\neg Dx \Rightarrow Wx$	$\Rightarrow$I, 2-11
13.	$\forall x(\neg Dx \Rightarrow Wx)$	$\forall$I, 12

La fantástica aventura de Tom y Jim

14 de noviembre

Jim entra en la máquina, ajusta el dispositivo para 24 horas, y aprieta el botón. Vaya a la página 512.

FORMALIZAR PARA VALIDAR EN LÓGICA DE PREDICADOS (PÁG. 272)

RETO

1. $\forall x(Mx \Rightarrow Rx), Ms, s = p \therefore Rp$. Válida

1.	$\forall x(Mx \Rightarrow Rx)$	premisa
2.	Ms	premisa
3.	$s = p$	premisa
4.	Mp	$=$E, 2, 3
5.	$Mp \Rightarrow Rp$	$\forall$E, 1
6.	Rp	$\Rightarrow$E, 4, 5

3. $Ms \therefore \exists x(Mx \,\&\, x = s)$. Válida

1.	Ms	premisa
2.	$s = s$	$=$I
3.	$Ms \,\&\, s = s$	&I, 1, 2
4.	$\exists x(Mx \,\&\, x = s)$	$\exists$I, 3

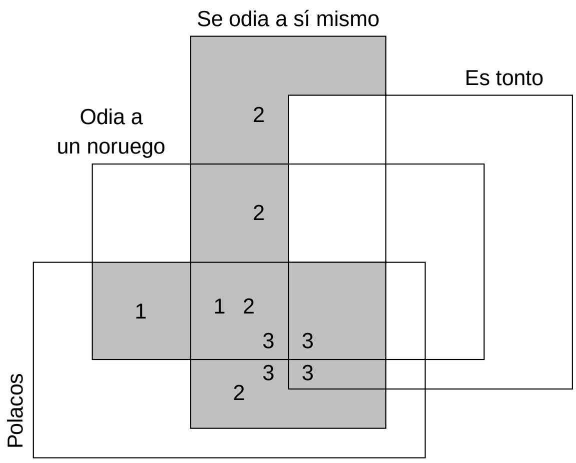
5. $\forall x((Px \,\&\, Cx) \Rightarrow Px)$. Válida

1.	$\quad Px \,\&\, Cx$	supuesto
2.	$\quad Px$	&E, 1
3.	$(Px \,\&\, Cx) \Rightarrow Px$	$\Rightarrow$I, 1-2
4.	$\forall x((Px \,\&\, Cx) \Rightarrow Px)$	$\forall$I, 3

7. $\forall x \forall y(Fxy \Rightarrow Wxy), \forall x(Bx \Rightarrow \forall y \neg Wxy) \therefore \forall x(Bx \Rightarrow \neg Fxx)$. Válida.

1.	$\forall x \forall y(Fxy \Rightarrow Wxy)$	premisa
2.	$\forall x(Bx \Rightarrow \forall y \neg Wxy)$	premisa
3.	$Bx \Rightarrow \forall y \neg Wxy$	$\forall$E, 2
4.	$\quad Bx$	supuesto
5.	$\qquad Fxx$	supuesto
6.	$\qquad \forall y(Fxy \Rightarrow Wxy)$	$\forall$E, 1
7.	$\qquad Fxx \Rightarrow Wxx$	$\forall$E, 6
8.	$\qquad Wxx$	$\Rightarrow$E, 5, 7
9.	$\qquad \forall y \neg Wxy$	$\Rightarrow$E, 3, 4
10.	$\qquad \neg Wxx$	$\forall$E, 9
11.	$\qquad Wxx \,\&\, \neg Wxx$	&I, 8, 10
12.	$\quad Fxx \Rightarrow (Wxx \,\&\, \neg Wxx)$	$\Rightarrow$I, 5-11
13.	$\quad \neg Fxx$	$\neg$I, 12
14.	$Bx \Rightarrow \neg Fxx$	$\Rightarrow$I, 4-13
15.	$\forall x(Bx \Rightarrow \neg Fxx)$	$\forall$I, 14

9. $\forall x((Px \,\&\, \exists y(Ny \,\&\, Hxy)) \Rightarrow Sx), \forall x(Hxx \Rightarrow Sx), \forall x(Px \Rightarrow \neg Hxx) \therefore \forall x(Px \Rightarrow \neg \exists y(Ny \,\&\, Hxy))$. Inválida. Primero, dibujemos diagramas de Venn para «es un polaco», «odia a un noruego», «se odia a sí mismo» y «es tonto». Esto nos ayudará a ver lo que está pasando. Las tres premisas nos dicen que las áreas sombreadas están vacías (los números representan qué premisas hacen que las áreas estén vacías):



Ciertamente, esto no significa que ningún polaco odie a un noruego. Por tanto, vamos a asignar nuevos significados. Usemos el conjunto de números naturales. Si hacemos que Hxy signifique «$x < y$», entonces nadie se odiará a sí mismo, por decirlo así, haciendo a las premisas 2 y 3 verdaderas. Sea Px «x es positivo». Sea Nx «x es menor que 40»; por tanto, habrá algunos polacos que odian a un noruego (por ejemplo, 17 [un polaco] es menor que [odia] 23 [un noruego]). Finalmente, queremos que todos los polacos que odian noruegos sean tontos. Éstos son los números del 1 al 39, por tanto hagamos que Sx signifique «x es menor que 100». Así obtenemos lo que buscábamos.

11. Aquí hay dos formulaciones, ambas válidas. Una formula «pintor de retratos» con PPx, y la otra con $\exists yPxy$ («hay alguien al que x ha pintado»). Sea PEx «x es de Peoria».

Una: $\forall x((PEx \,\&\, PPx) \Rightarrow (Ppx \Leftrightarrow \neg Pxx)) \therefore \neg(PPp \,\&\, PEp)$
Dos: $\forall x((PEx \,\&\, \exists yPxy) \Rightarrow (Ppx \Leftrightarrow \neg Pxx)) \therefore \neg(\exists yPpy \,\&\, PEp)$ •

Cerca y Acerca de la lógica

EN EL INFIERNO CON RAYMOND SMULLYAN (PÁG. 274)

EJERCICIO

1. Imagine las matrículas en orden alfabético y numérico: AAA000, AAA001, ... , AAB000, AAB001, ...
3. Primero, imagine todos los pares que usan sólo el número 1, que es sólo (1, 1). A continuación, imagine todos los pares adicionales que usan 2, que son (1, 2), (2, 1) y (2, 2). Después, imagine todos los pares adicionales que usan 3, etc. También son posibles otras estrategias.
5. Imagine las palabras sin sentido en orden alfabético.

7. La única diferencia es que llevaría más tiempo, pero si puede escapar adivinando algo cada día, también la tiene adivinando sólo los domingos.
9. Lo mismo que el problema 7. Como en la eternidad hay un número infinito de domingos, hay un número infinito de días 17 de marzo en años que son cuadrados perfectos.

NO HAY ESCAPATORIA (SEGURA) (PÁG. 277)

La demostración de esta sección en ocasiones confunde a lectores poco familiarizados con los cuantificadores. Estamos diciendo que no existe ninguna estrategia para escapar del infierno. Esto es,

$$\neg\exists s(\text{«}s \text{ es una estrategia para escapar del infierno»})$$

¿Cómo formulamos «*s* es una estrategia para escapar del infierno»? Decimos que no importa el número que elija el demonio, ese número estará en nuestra lista. Esto es,

$$\neg\exists s\forall n(\text{«el número } n \text{ está en la lista de la estrategia } s\text{»})$$

¿Y cómo formulamos esto? Decimos que para algún k, n es el k-ésimo número de la lista:

$$\neg\exists s\forall n\exists k(\text{«}n \text{ es el } k\text{-ésimo número de la lista de } s\text{»})$$

Pero ahora usted ya conoce las leyes lógicas $\neg\exists = \forall\neg$ y $\neg\forall = \exists\neg$, por tanto, podemos traducir esto en

$$\forall s\exists n\forall k(\text{«}n \textit{ no} \text{ es el } k\text{-ésimo número de la lista de } s\text{»})$$

Éste es exactamente el enunciado que demostramos en la sección.

Los psicólogos y los matemáticos miden la complejidad de las oraciones por el número de cambios de cuantificadores. De acuerdo con este análisis, ¡la oración anterior se considera difícil!

Otra forma de mirar los resultados de este capítulo es que existe un conjunto infinito que es más grande que el conjunto de los números naturales. Este conjunto es el conjunto de números reales (decimales). Esto plantea dos interesantes preguntas:

1. Ahora tenemos dos «tamaños» infinitos. ¿Hay algún tamaño intermedio entre estos dos?
2. ¿Hay tamaños todavía más grandes?

Georg Cantor, el descubridor de estos tamaños, pensó que la respuesta a la primera pregunta era no, y este supuesto llegó a ser conocido como «la hipótesis del continuo» (la recta real se llama a menudo «el continuo»). ¿Qué piensa usted?, ¿tenía razón? (vea «La Imposibilidad», en el capítulo 9, para responder).

La respuesta a la segunda pregunta es un sí absoluto; de hecho, no hay ningún tamaño mayor. En las matemáticas se ha desarrollado una rama que estudia estos tamaños infinitos o «cardinales». La teoría que ha desarrollado es realmente cósmica. La existencia de enormes cardinales con propiedades exóticas que parecen tan lejanos de la matemática ordinaria está íntimamente relacionada con ella. El trabajo ha hecho posible que los matemáticos puedan responder algunas interesantes preguntas sobre decimales y demostrar que hay muchas preguntas sin respuesta. Vea «La Imposibilidad», para saber más sobre esto.

En las Notas, Referencias Bibliográficas, Pistas y Algunas Respuestas de «Algoritmo», en el capítulo 5, demostramos que hay un conjunto no computable. Hay otra demostración que utiliza la teoría de Cantor de los tamaños infinitos: el número de conjuntos posibles es no numerable. El número de programas posibles en BASIC es numerable (podemos poner los programas en orden alfabético, considerando primero todos los que tienen sólo una letra, después todos los que tienen dos letras, ...). Un programa puede computar sólo un conjunto. Como hay más conjuntos que programas, debe haber conjuntos (muchos, de hecho) que no son computados por ningún programa.

Esta argumentación es especialmente interesante porque «no es constructiva». Realmente, no nos da un ejemplo de un conjunto no computable, al contrario que la demostración dada antes.

RETO. Éstas son sugerencias de respuestas. Hay muchas observaciones que podrían hacerse.

1. a. Los versos de «Amazing Graze» implican que estaremos en el cielo para siempre (un número infinito de años). Como los versos implican una correspondencia uno-a-uno entre el tiempo total en el cielo y ese tiempo menos los primeros 10.000 años, esto sólo puede suceder si el número de años es infinito.

   b. Ésta es una cita especialmente interesante a la luz de la experiencia de Galileo. Él encontró la paradoja en dos argumentos relativos a subconjuntos infinitos de un conjunto infinito. Whitman parece estar diciendo que él está a gusto con las contradicciones. Desde luego, lo que Cantor demostró es que no existe una contradicción real.

2. a. La situación aquí es idéntica a la de «Amazing Graze».

   b. Si su amor es verdaderamente infinito, puede dar una cantidad infinita de él y todavía tener una cantidad infinita. Sin embargo, debe ser cuidadoso. Suponga que su amor va en cajas numeradas 1, 2, 3, etc. Entonces, él podría dar todas las cajas con número impar, lo que le dejaría con todas las de número par. En este caso, habría dado un amor infinito reteniendo todavía un amor infinito. Por otra parte, si él da todas las cajas numeradas de 100 en adelante, se habría quedado sólo con un número finito. Quizás Shakespeare debería haber incluido una cláusula: «Cuanto más doy —suponiendo que lo doy de la forma adecuada—, más tengo.»
   Podríamos añadir que el lenguaje parece sugerir algo que no es matemáticamente preciso. «Cuanto más doy, más tengo» suena como si él ganase cuando da. Si es así, está funcionando algo más allá de las matemáticas. Esto no es sorprendente, desde luego; como dijo el matemático Blaise Pascal, «Le c¤ur a ses raisons que la raison ne connait point» («El corazón tiene razones que la razón desconoce»).

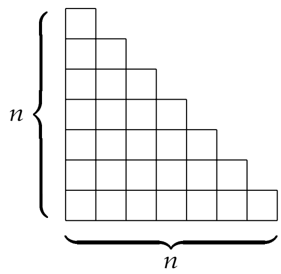
•

TAREAS INFINITAS (PÁG. 281)

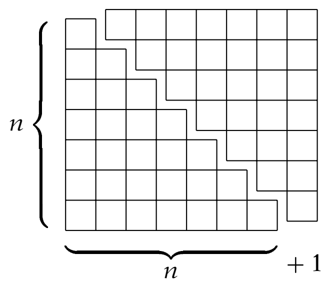
EJERCICIOS

1. Argumente que simplemente al irse a casa usted realiza un número infinito de tareas. (Primero recorre la mitad del camino a casa, después...).
3. Sí. Siempre lance fuera la pelota con el número menor pero quédese la 1.
5. Vea «Tareas y Super-Tareas», en *Análisis* 15, de James Thomson (1954).

Nota: Al considerar la dificultad de realizar tareas infinitas, debería tener presente que las finitas también pueden ser prácticamente imposibles. Sabemos, por ejemplo, que la suma de los n primeros números es exactamente la mitad de n veces $(n + 1)$. Nuestra incapacidad para chequear esto físicamente, por ejemplo sumando los primeros 1.000.000.000.000.000.000.000 números, no afecta a nuestra confianza en el teorema. Nuestra confianza está sólidamente basada en una demostración matemática, y aquí está la prueba. La suma de $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ es igual al área de la siguiente figura (cada cuadrado tiene área 1):



Si ponemos juntas dos figuras de estas,



obtenemos un rectángulo con n filas y $n + 1$ columnas. El área del rectángulo, $n(n + 1)$, es exactamente dos veces el área de la figura original, y por tanto la suma original debe ser $n(n + 1)/2$.

Nos preguntamos, ¿los números finitos grandes son más reales que los números infinitos?

Un trabajo excelente sobre la infinitud es *Infinity and the Mind*, de Rudy Rucker (Birkhèuser, 1982).

Infinitud: en potencia y en acto (pág. 284)

Bruno, el autor del epígrafe, fue un filósofo y teólogo del siglo XVI. Fue un apóstol del infinito real. También tendía a irritar a la gente. Sostenía, en contra de la doctrina de la iglesia, que el hombre podía contemplar el infinito real. Después de una vida de confrontación, fue quemado en la hoguera por herejía. Aunque pretende considerársele un mártir del infinito, la situación era indudablemente mucho más compleja. La política, por ejemplo, pudo tener su papel. Algunas investigaciones recientes sugieren que Bruno espió en Francia para los ingleses.

Hace relativamente poco tiempo ha salido a la luz una evidencia dramática de la profunda sospecha que los griegos tenían sobre el infinito real. Arquímedes, seguramente el mayor matemático del mundo antiguo, resolvió un problema de cálculo (aunque el cálculo no se desarrolló formalmente hasta cerca de 2000 años más tarde). Su solución era un modelo de infinitud potencial, que se preservó y fue muy conocido. Sin embargo, en 1905 se descubrió una carta en la que Arquímedes explicaba cómo había descubierto su teorema. Él usó el infinito real de forma deliberada y creativa. Claramente, él percibió que esos métodos no eran adecuados, y encontró una demostración más aceptable, aunque igualmente creativa.

Demostración por contradicción (pág. 286)

Ejercicios

1. El niño demuestra por contradicción que su madre es un resto. Él supone que ella no es un resto. Esto proporciona una característica que demuestra que es un resto —una contradicción.
3. Para demostrar que ella no es una mujer, asuma la negación, que sí es una mujer, W. Entonces obtenemos H (por $W \Rightarrow H$) y también $\neg H$ (por $W \Rightarrow \neg H$). Esto es una contradicción.
4. El error está en la formulación. Usamos H en la primera premisa para representar: «usted puso sus manos sobre ella». En la segunda premisa usamos H para representar «usted no debería poner sus manos sobre ella». Éstas no son negaciones la una de la otra, puesto que podrían ser verdaderas al mismo tiempo.

Lógica informal

ANITA HILL Y ARLEN SPECTER (PÁG. 289)

EJERCICIOS

1. La conclusión del senador Specter es que Anita Hill cometió perjurio en su testimonio. Él argumenta que el testimonio de ella por la tarde contradice el que dio por la mañana. Como evidencia de esto, presenta extractos de las transcripciones de las sesiones de la mañana y de la tarde.
3. Hay varios enfoques que podrían tomarse. El primero es que el testimonio de Anita Hill no se contradice a sí mismo. Por la mañana, ella dijo repetidamente que no recordaba a nadie sugerirle que su declaración podría usarse para obligar a Thomas a retirarse. Por la tarde, ella recuerda claramente. Esto no es inconsistente. Es posible que por la tarde ella recordase algo que no pudo recordar antes.
   Un segundo enfoque se basa en la curiosa observación que hace el senador Specter sobre retractarse durante un proceso. Usted podría argumentar que tanto la mañana como la tarde son partes del mismo proceso. Entonces, su testimonio de la tarde desdice (posiblemente) su testimonio de la mañana y por tanto eso no es perjurio.

RETO

1. Clinton cubre muchos aspectos. Empieza por subrayar su trabajo en Arkansas para refutar el argumento de que carece de experiencia (presumiblemente, en la Casa Blanca). Presenta evidencias de que su trabajo allí ha sido bueno. Después, da publicidad a su experiencia con «gente corriente» pero no apoya sus reivindicaciones y es vago en por qué su experiencia es buena.
   Clinton vuelve sobre la idea del cambio y presenta argumentos y pruebas razonables de su importancia. Su comentario sobre el libro implica que incluso la administración espera un cambio, pero sin cambiar la política, lo cual es una declaración no defendida.
   Finalmente, enlaza la necesidad de cambio con la mayor experiencia del presidente, sugiriendo que dado que las condiciones han cambiado, la experiencia sobre las condiciones anteriores no es importante.
2. Bush defiende el estado económico del país. No ofrece ningún apoyo pero hace una franca apelación al patriotismo (vea «Falacias» en el capítulo 5). Repite su acusación de que el Congreso ha bloqueado el cambio y que él traerá el cambio con un nuevo Congreso. Nuevamente, su reivindicación no se apoya en nada.
3. Perot plantea diferentes cuestiones. Primero concluye que el país está en mal estado y da algunos detalles. A continuación afirma que la mayor experiencia del presidente es mala en realidad y da algunos detalles. Finalmente, sugiere que él tiene experiencia del tipo adecuado, esto es, de resolver problemas, aunque no apoya esta afirmación.
   Su argumento de que la experiencia de Bush en el desempeño de su cargo es mala es algo débil, puesto que es posible aprender de tal experiencia. Por supuesto, no querríamos votar a alguien que está aprendiendo en el trabajo. Sin embargo, lo que dice realmente es que Bush ha fallado y por tanto es esperable que vuelva a fallar.
4. Bush ataca el carácter de Clinton planteando la participación de Clinton en manifestaciones contra la guerra de Vietnam, hace veinte años, cuando estaba estudiando

en Inglaterra. Bush no dice por qué eso está mal. Una vez más apela al patriotismo. Las referencias a los niños de guetos y a los prisioneros de guerra no están explicadas.

Su argumento más poderoso aparece cuando compara su propio historial militar con la posición de su oponente en la guerra de Vietnam y sugiere que esta historia limitaría la capacidad de Clinton para mandar sobre fuerzas armadas.

5. Perot defiende a Clinton atacando el carácter de Bush. Parece estar de acuerdo en que Clinton cometió errores, pero compara estos errores con los de Bush como presidente. Tales errores, en sí mismos, podrían no indicar falta de carácter, aunque sí podría hacerlo el fallo al asumir responsabilidades, y Perot lo plantea. Perot concluye diciendo que liquidará el caos, pero no dice nada que apoye esta afirmación.
6. Clinton pone en evidencia las apelaciones de Bush al patriotismo en el debate y antes del debate. Las comparaciones de Clinton con Joe McCarthy y el padre de Bush son muy efectivas. Ciertamente, es verdad que las distorsiones de McCarthy y Bush difieren significativamente en grado, pero tienen alguna similaridad. •

LA AVENTURA DE LOS DANZARINES (PÁG. 297)

Hay un error en el argumento de Holmes. Sea C «tienes tiza en tus manos», sea B «jugaste al billar», y sea T «jugaste al billar con Thurston». La argumentación empieza:

1. C
2. $B \Rightarrow C$
3. $B \Rightarrow T$

Claramente, Holmes concluye después de 1 y 2 que B es verdadera, y entonces se va a T. ¿Es válido concluir B? Deductivamente no, pero inductivamente, quizás. Vea «La Ley de Bayes y Sherlock Holmes», en el capítulo 7.

LÓGICA COMERCIAL I (PÁG. 298)

Esto es una reproducción de una oferta del *Christian Science Monitor* a potenciales suscriptores. Si tiene dificultad para identificar la diferencia entre las alternativas, es porque no hay diferencia.

Curiosidades y rompecabezas

The Digestor's Digest, PÁGINA 5 (PÁG. 299)

Como con todas las páginas, ahora debemos considerar dos casos: en uno, asumimos que ésta no es la página de humor, y en el otro, asumimos que sí lo es. En ambos casos, el primero no puede ser verdadero. Como es falso, debe haber declaraciones en la página que son verdaderas, y por tanto la segunda parte es verdadera. Entonces, si ésta no es la página de humor, el primero es un anuncio y el segundo es un artículo. Si lo es, entonces las partes están intercambiadas.

Esto es lo mejor que lo podemos hacer. No sabemos si la página 5 es o no la página de humor.

EL PROBLEMA DE LA BARBERÍA (PÁG. 301)

EJERCICIO. *Pista:* Formule lo siguiente: Sea A «Allen está dentro», sea B «Brown está dentro», y sea C «Carr está dentro». Hay que formular sólo dos enunciados.

LA CLASE DE INGLÉS (PÁG. 303)

Esperamos que haya resuelto esto y lo esté leyendo sólo para comprobar su respuesta. Si se ha rendido, permítanos darle una pista: use la plantilla. Otra pista: si lee que un libro llegó después de otro, entonces sabe que el primero no fue publicado en mayo y el segundo no fue publicado en enero.

RESPUESTAS

El error del coronel Boddicker: romance sonado; reverendo Tobias Stengel; febrero

El secreto de Sutcliffe Manor: bibliotecas de préstamo; Morgan McGraw; mayo

El inspector Palmer se decide: exploración ártica; Julia Williams; enero

Sin indicios del ganso azul: depravación; Nottingham Billy; marzo

El capricho de lady Quisenberry: misterio; dama Dahlia Warren; abril

La fantástica aventura de Tom y Jim

18 de noviembre

—El tiempo se ha ramificado —dice Tom—. Tú y el otro Jim tenéis el mismo pasado pero diferentes futuros. —Hizo una pausa y añadió sobriamente—: Eso suponiendo que el otro Jim tuvo un futuro.

—Por otra parte —dijo brillantemente—, ahora sabemos que la ley del tercio excluso no es verdadera. Esta ley [vea la sección sobre este tema en el capítulo 8] establece que para cualquier proposición P, el enunciando $P \vee \neg P$ debe ser verdadera. Pero, ¿qué pasa si P es «el 18 de noviembre, Jim tendrá cuarenta y cuatro años y cinco días»? Hace dos días, probablemente habríamos dicho que $P \vee \neg P$ es verdadera, porque P es verdadera, pero ahora sabemos que por una rama (la rama de la que sacamos a Jim), P es verdadera, y por la otra rama (la rama en la que estamos ahora), $\neg P$ es verdadera. Por tanto, hace dos días, ni P ni $\neg P$ eran verdaderas, y entonces ¡$P \vee \neg P$ no era verdadera!

RETO. ¿Puede usted inventarse experimentos con cualquier dispositivo imaginable que respondían de forma definitiva alguna de las siguientes preguntas?

¿Hay alguna cosa que sea causa de cualquier otra cosa?
¿Tiene el tiempo una dirección?
¿Hay universos alternativos?
¿Se ramifica el tiempo?
¿Tiene bucles el tiempo? •

Escriba una aventura en el tiempo que incluya la paradoja del examen sorpresa.

7. SOFISTICACIÓN SIMBÓLICA, INDUCCIÓN Y LÓGICA DE LOS NEGOCIOS

Lógica formal: algo de sofisticación simbólica

CUANTIFICADORES Y ARITMÉTICA (PÁG. 307)

RETO 1. $\exists x \exists y \exists z (Fx \,\&\, Fy \,\&\, Fz \,\&\, x \neq y \,\&\, y \neq z \,\&\, x \neq z)$ •

RETO 2. Pista: La deducción en ambas direcciones no es difícil. Use la ley de Tautología y las leyes relativas a los cuantificadores y la negación dadas al final de «Razonamiento Hipotético: Deducción a partir de Supuestos», en el capítulo 6. •

RETO 3. $\forall w \forall x \forall z((Fw \,\&\, Fx \,\&\, Fy \,\&\, Fz) \Rightarrow (x = y \vee y = z \vee x = z \vee x = w \vee w = = y \vee w = z)$ •

RETO 5

1.	$\exists x(Fx \,\&\, \forall y(Fy \Rightarrow x = y))$	premisa
2.	$Fc^* \,\&\, \forall y(Fy \Rightarrow c^* = y)$	$\exists$E, 1
3.	Fc^*	&E, 2
4.	$\exists x Fx$	$\exists$I, 3
5.	$\forall y(Fy \Rightarrow c^* = y)$	&E, 2
6.	$\quad Fx \,\&\, Fy$	supuesto
7.	$\quad Fx$	&E, 6
8.	$\quad Fx \Rightarrow c^* = x$	$\forall$E, 5
9.	$\quad c^* = x$	$\Rightarrow$E, 7, 8
10.	$\quad Fy$	&E, 6
11.	$\quad Fy \Rightarrow c^* = y$	$\forall$E, 5
12.	$\quad c^* = y$	$\Rightarrow$E, 10, 11
13.	$\quad x = y$	$=$E, 9, 12
14.	$(Fx \,\&\, Fy) \Rightarrow x = y$	$\Rightarrow$I, 6-13
15.	$\forall y((Fx \,\&\, Fy) \Rightarrow x = y)$	$\forall$I, 14
16.	$\forall x \forall y((Fx \,\&\, Fy) \Rightarrow x = y)$	$\forall$I, 15
17.	$\exists x Fx \,\&\, \forall x \forall y((Fx \,\&\, Fy) \Rightarrow x = y)$	&I, 4, 16

y en la otra dirección

1.	$\exists x Fx \,\&\, \forall x \forall y((Fx \,\&\, Fy) \Rightarrow x = y)$	premisa
2.	$\exists x Fx$	&E, 1
3.	$\forall x \forall y((Fx \,\&\, Fy) \Rightarrow x = y)$	&E, 1
4.	Fc^*	$\exists$E, 2
5.	$\forall y((Fc^* \,\&\, Fy) \Rightarrow c^* = y)$	$\forall$E, 3
6.	$(Fc^* \,\&\, Fy) \Rightarrow c^* = y$	$\forall$E, 5
7.	$\quad Fy$	supuesto
8.	$\quad Fc^* \,\&\, Fy$	&I, 4, 7
9.	$\quad c^* = y$	$\Rightarrow$E, 6, 8
10.	$Fy \Rightarrow c^* = y$	$\Rightarrow$I, 7-9
11.	$\forall y(Fy \Rightarrow c^* = y)$	$\forall$I, 10
12.	$Fc^* \,\&\, \forall y(Fy \Rightarrow c^* = y)$	&I, 4, 11
13.	$\exists x(Fx \,\&\, \forall y(Fy \Rightarrow x = y))$	$\exists$I, 12

Técnicamente, el paso 11 viola la regla $\forall$I. Las cosas pueden arreglarse con una deducción algo más complicada o con una regla $\forall$I más compleja.

•

FUNCIONES (PÁG. 310)

EJERCICIO

1.	$\forall x(z = z)$	$=$I
2.	$fx = fx$	$\forall$E, 1
3.	$\exists y(fx = y)$	$\exists$I, 2
4.	$\forall x \exists y(fx = y)$	$\forall$I, 3

RETO 1

1.	$\forall z(z = z)$	$=$I
2.	$fx = fx$	$\forall$E, 1
3.	$\quad x = y$	supuesto
4.	$\quad fx = fx$	$=$E, 2, 3
5.	$x = y \Rightarrow fx = fy$	$\Rightarrow$I, 3-4
6.	$\forall y(x = y \Rightarrow fx = fy)$	$\forall$I, 5
7.	$\forall x \forall y(x = y \Rightarrow fx = fy)$	$\forall$I, 6

Considere el universo de los números enteros, con $fx = x^2$. Entonces $f(2) = f(-2)$, pero $2 \neq -2$. •

RETO 2. Rxy es una función de pares de objetos en $\{V, F\}$, mientras que $\neg$ es una función de $\{V, F\}$ en $\{V, F\}$, de forma que su composición es de nuevo una función de pares de objetos en $\{V, F\}$. $\exists x$ es una función de propiedades en $\{V, F\}$. Ahora bien, para cada objeto c del universo, $\neg Rxc$ es una propiedad, de forma que $\exists x \neg Rxc$ le asigna un valor en $\{V, F\}$. Así, a cada objeto c se le asigna un valor de verdad. Se sigue que $\exists x \neg Rxy$ es una función que asigna a cada objeto un valor de verdad en $\{V, F\}$. •

LA TEORÍA DE LAS DESCRIPCIONES DE RUSSELL (PÁG. 315)

Russell escribió su *Introducción a la Filosofía Matemática* en la cárcel, por oponerse a la participación de Inglaterra en la Primera Guerra Mundial.

RETO 1

1.	$\exists x(Fx \,\&\, \forall y(Fy \Rightarrow x = y) \,\&\, Gx)$	premisa
2.	$Fc^* \,\&\, \forall y(Fy \Rightarrow c^* = y) \,\&\, Gc^*$	$\exists$E, 1
3.	Fc^*	&E, 2
4.	$\exists xFx$	$\exists$I, 3
5.	$\quad Fx \,\&\, Fy$	supuesto
6.	$\quad \forall y(Fy \Rightarrow c^* = y) \,\&\, Gc^*$	&E, 2
7.	$\quad \forall y(Fy \Rightarrow c^* = y)$	&E, 6
8.	$\quad Fx \Rightarrow c^* = x$	$\forall$E, 7
9.	$\quad Fy \Rightarrow c^* = y$	$\forall$E, 7
10.	$\quad Fx$	&E, 5
11.	$\quad Fy$	&E, 5
12.	$\quad c^* = x$	$\Rightarrow$E, 8, 10

13.	$c^* = y$	$\Rightarrow$E, 9, 11
14.	$x = y$	$=$E, 12, 13
15.	$(Fx \,\&\, Fy) \Rightarrow x = y$	$\Rightarrow$I, 5-14
16.	$\forall y((Fx \,\&\, Fy) \Rightarrow x = y)$	$\forall$I, 15
17.	$\forall x \forall y((Fx \,\&\, Fy) \Rightarrow x = y)$	$\forall$I, 16
18.	Fx	supuesto
19.	$\forall y(Fy \Rightarrow c^* = y) \,\&\, Gc^*$	&E, 2
20.	$\forall(Fy \Rightarrow c^* = y)$	&E, 19
21.	$Fx \Rightarrow c^* = x$	$\forall$E, 20
22.	$c^* = x$	$\Rightarrow$E, 18, 21
23.	Gc^*	&E, 19
24.	Gx	$=$E, 22, 23
25.	$Fx \Rightarrow Gx$	$\Rightarrow$I, 18-24
26.	$\forall x(Fx \Rightarrow Gx)$	$\forall$I, 25
27.	$\exists x Fx \,\&\, \forall x \forall y((Fx \,\&\, Fy) \Rightarrow x = y)$	&I, 4, 17
28.	$\exists x Fx \,\&\, \forall x \forall y((Fx \,\&\, Fy) \Rightarrow x = y) \,\&\, \forall x(Fx \Rightarrow Gx)$	&I, 26, 27 •

RETO 3. Russell se preguntaría si la primera premisa se debe formalizar utilizando negación externa o negación interna. Con la primera, la premisa es $\exists x(Vx \,\&\, \forall y(Vy \Rightarrow y = x)\&Mx) \vee \neg\exists x(Vx\&\forall y(Vy \Rightarrow y = x)\&Mx)$. La premisa es cierta por lógica, pero si el argumento ha de ser válido, la tercera premisa debe escribirse como $\neg\exists x(Vx \,\&\, \forall y(Vy \Rightarrow y = x) \,\&\, Mx) \Rightarrow \exists x Vx$, lo cual es falso. De otra forma, si la primera premisa se formaliza con una negación interna resultará un argumento por razonamiento circular, al estar suponiendo la existencia de un vampiro. Esto es, será falsa a menos que exista tal vampiro. •

Cerca y Acerca de la lógica

LAS MEDIDAS DE LA INCERTIDUMBRE (PÁG. 321)

EJERCICIOS. 1. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{12}$ 5. $\frac{1}{6}$

LA LEY DE BAYES Y SHERLOCK HOLMES (PÁG. 324)

EJERCICIOS

1. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{6}$
5. $\frac{1}{6}$ (En realidad no importa si salió cara o cruz).
7. 0,00285 (0,003 por 0,95)
9. 0,00015 (0,003 por 0,05)
11. 0,0527 (la respuesta a 7 más la respuesta a 8)
13. 0,95 (la respuesta a 7 dividida por la respuesta a 6)

LÓGICA INDUCTIVA (PÁG. 327)

En 1956 Robert Abbott inventó un juego de lógica inductiva, «Eleusis». Es bien divertido y está descrito en *More Mathematical Puzzles and Diversions*, de Martin Gardner (Penguin, 1966) y en *Abbott's New Card Games* (Funk & Wagnalls, 1963), del propio Abbott. En *New Rules for Classic Games*, de R. Wayne Schmittberger (Wiley, 1992), se puede encontrar una versión que incorpora cambios realizados en los años setenta.

Hay una historia de ciencia ficción fascinante cuya premisa tiene que ver con las leyes del azar, «La Ley», de Robert M. Coates. Aparece en las antologías *The Mathematical Magpie*, editada por Clifton Fadiman (Simon & Schuster, 1962) y *The Looking Glass Book of Stories*, editada por Hart Day Leavitt (Random House, 1960).

Stan Wagon escribió una aceptable serie de artículos para el *Mathematical Intelligencer* sobre la evidencia de conjeturas matemáticas. El ejemplo de la conjetura de Collatz está tomado del primero de ellos (vol. 7, n.º 1, 1985, págs. 72-76).

El ejemplo de Martin Gardner ha salido del excelente «Inducción y Probabilidad» de su libro *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments* (W. H. Freeman, 1988). Este artículo es un muy completo ensayo acerca de las dificultades que ha de enfrentar el lógico inductivo. También es de interés *Labyrinths of Reason*, de William Poundstone (Anchor-Doubleday, 1988).

Una completa introducción a la lógica cuántica aparece en *An Introduction to Hilbert Space and Quantum Logic*, de David Cohen (Springer-Verlag, 1989).

La teoría matemática de la información de Keith Devlin se puede encontrar en su libro *Logic and Information* (Cambridge University Press, 1991).

¿Experimenta usted dificultades con puzzle1? ¿Se enfrenta a una pantalla en blanco mientras se pregunta qué es lo que ha ido mal? Nada ha ido mal. Recuerde, se supone que debe teclear algo y pulsar «Enter». A continuación, la computadora le responderá. En el primer universo el resultado es muy simple: la computadora se limita a repetir lo que usted escriba. Una vez que descubra esto, debería pasar al siguiente.

¿Demasiado fácil? ¿Está seguro de haberlo descubierto todo? Algunos universos son simples, como el primero, otros son más complicados. Normalmente, hay una regla general, pero a menudo hay también algunas otras reglas menores. ¿Ha probado a escribir más de una palabra? ¿Ha probado a escribir números o caracteres? ¿Ha probado con letras mayúsculas?

¿Cómo podrá saber cuándo ha descubierto todo lo que había que descubrir? Ya debería saber la respuesta a esto: nunca lo sabrá. Ésa es precisamente la situación a la que se enfrentan los investigadores en cualquier disciplina.

Peor aún, nosotros, los programadores, ¡nunca lo sabremos! Ciertamente, sabemos lo que quisimos programar, pero muy pocos programas están libres de errores. Un área importante de la investigación lógica está relacionada con encontrar formas de demostrar que los programas hacen lo que se supone que deben hacer. Parece ser un problema extremadamente difícil, pero enormemente importante, pues los programas de ordenador se encargan del sistema de telefonía, del de transporte, guían nuestros misiles, y un largo etcétera. ¡Prácticamente de ninguno de estos programas, de los que dependen nuestras vidas, se ha demostrado que no tenga errores!

EJERCICIO

Respuestas de puzzle1

1. La computadora simplemente copia lo que usted escriba.
3. La computadora contesta alternativamente «HO» y «HI». No le presta ninguna atención a lo que usted escriba.
5. La computadora coge cada letra que usted escriba y la reemplaza por la siguiente letra del alfabeto (p. ej., reemplaza «f» por «g», «z» por «a»). También resta uno de cada dígito (p. ej., «5» se vuelve «4», «0» se vuelve «9»).
7. La computadora responde «no» a prácticamente todo lo que usted escriba, a menos que sea «no», en cuyo caso escribe «yes». Si lo ha descubierto, ya es bastante, pero, como dijimos más arriba, nunca puede estar seguro de haberlo descubierto todo. ¿No sería posible que hubiera una respuesta especial para «Millard Fillmore»? No es muy probable, pero mientras no lo pruebe, ¿cómo va a saberlo? Cuando lo hace, «Millard Fillmore» se queda con un «no», como era de esperar, pero sí hay más. Si usted escribe «NO», le contestará «YES», si escribe «No», le contesta «yeS» y si escribe «nO» le contesta «yEs».
9. Si la primera letra que usted escribe está en el rango de la «a» a la «g», el computador responde «Hey kids! It's time for inductive logic!» (¡Chicos, ha llegado el momento de la lógica inductiva!). Si su primera letra está entre «h» y «m», la respuesta es «Tom and Jim are bald» (Tom y Jim están calvos), de la «n» a la «s» reciben un «this sentence is entirely in lowercase letters» (esta frase está toda en letras minúsculas); de la «t» a la «z» se quedan con «Honey, I shrunk the kids» (Cariño, he encogido a los niños). Cualquier otro carácter se encontrará con «Letters! Please! Just letters!» (¡Letras, por favor, sólo letras!). Hay más variaciones si su primera letra es mayúscula.

Respuestas de puzzle2

1. La computadora repite lo que usted teclee, pero lo recuerda y acumula, esto es, la respuesta a la segunda línea que escriba será su primera y segunda líneas. Continúa de esta forma hasta un límite de 200 caracteres, en cuyo caso sólo contesta con los últimos 200 caracteres que usted haya tecleado. Por último, si usted termina la línea con un punto provocará un borrado de memoria y la computadora volverá a arrancar.
3. La computadora siempre responde «Do you have a color monitor?» (¿Tienes monitor en color?), a menos que teclee el nombre de un color. Cuando sucede esto, la computadora comienza a escribir en ese color y responde «Awesome!» (¡Curioso!). Las cosas vuelven a cambiar con nuevos colores. Si se mencionan varios colores en una línea, la computadora alterna de un

color a otro. Si, tras haber cambiado de color, usted escribe una línea que no mencione el nombre de un color, simplemente responderá «Hmm...» Si teclea «black» (negro) ocurrirá algo muy extraño, parecerá como si la computadora se hubiera bloqueado; en realidad, no es que se haya estropeado, simplemente estará haciendo lo mismo que con los otros colores, esto es, ¡está escribiendo en negro! La computadora reconoce negro, azul, verde, rojo, púrpura, marrón, blanco, gris, rosa, amarillo y cián (un tipo de azul claro). Los colores se mantendrán incluso cuando cambie a otros universos (a menos que sea el negro).

5. La computadora escribe el resultado del cálculo: 2 más 3 veces el número de caracteres que usted haya tecleado. No cuenta los espacios.
7. ¡Éste es muy enrevesado! Es casi rastrero. ¡La computadora responde con el número de segundos que han transcurrido desde la última vez que escribió usted una línea!
9. No le vamos a estropear éste. No tendrá usted ninguna dificultad en descubrirlo.

PROGRAMACIÓN LÓGICA (PÁG. 331)

Leibniz (citado al comienzo de la sección) fue uno de los distintos descubridores de manera independiente del cálculo (junto con Isaac Newton). También descubrió independientemente la numeración en base 2 (ver «En binario» en el capítulo 4).

La predicción que aparece en la cita de Leibniz al comienzo de la sección augura el éxito final de la inteligencia artificial. Uno de los objetivos declarados de esta área de la ciencia de la computación es replicar la actuación de la mente humana. Varios filósofos han defendido que esto es intrínsecamente imposible. Posiblemente, fue J. R. Lucas el primero en argumentarlo, basándose en el teorema de Gödel (ver «La imposibilidad» en el capítulo 9). El teorema de incompletitud revela limitaciones en la capacidad de los sistemas formales, tales como las máquinas, limitaciones que Lucas sentía que la mente humana no compartía. Más recientemente, Roger Penrose en su *The Emperor's New Mind* (Viking Penguin, 1991) va más allá sobre la base del mismo argumento.

Además de su funcionamiento como máquina lógica, Prolog se diseñó para procesar lenguajes naturales y artificiales. Ha tenido mucho éxito en esta tarea. En sus dos papeles fue un avance significativo sobre los lenguajes anteriores.

Un ejemplo de los comentarios del final del capítulo, relativos a significados, consecuencias y procedimientos, lo constituye el símbolo «=». Sencillamente, ¿qué es? ¿Significa «$a = b$» que a es igual a b? No necesariamente. Si consultamos

¿a=b?

Prolog siempre responde con

no

Bien, entonces ¿tiene la fórmula $a = b$ alguna consecuencia? ¿Se comporta, por ejemplo, como en Basic, en el que es una instrucción? Esto es, ¿es una orden a la computadora para que modifique el valor de *a* de manera que sea el mismo que el de *b*? Realmente no. De hecho, no está permitido utilizar «=» en un hecho ni en la cabeza de una regla. A decir verdad, ¡no hay manera en Prolog de obligar a que dos constantes diferentes representen el mismo objeto!

Así que, ¿cómo debemos entender «=» en Prolog? La clave es el procedimiento. Por ejemplo, dada una consulta cualquiera, Prolog busca un hecho con la misma forma o una regla cuya cabeza tenga la misma forma. Si encuentra una, continúa a partir de ella, pero si no la encuentra (y en el caso de «$a = b$» no la encontrará), entonces la consulta falla.

El procedimiento que hay detrás de Prolog se puede presentar completo de forma enteramente lógica, pero está más allá del objetivo de este libro. Existen muchos libros sobre Prolog; ver, por ejemplo, *Prolog and Natural Language Analysis* de Pereira y Shieber (Center for the Study of Language and Information, 1987).

EJERCICIOS

1.
```
padre(X,Y):–
        progenitor(X,Y),
        marido(X,Z).
```

3.
```
primo(X,Y):–
        progenitor(Q,Y),
        progenitor(Z,X),
        not Z=Q,
        progenitor(W,Q),
        ( progenitor(W,Z);
        ( casado(Z,P),
        not P=Q,
        progenitor(W,P) ) ).
```

(Hay dos formas diferentes de ser primos hermanos.)

4.
```
antepasado(X,Y):–progenitor(X,Y).
antepasado(X,Y):–
            progenitor(Z,Y),
            antepasado(X,Z).
```

5.
```
producto(X,cero,cero).
producto(X,s(Y),Z):–
          producto(X,Y,W),
          suma(W,X,Z).
```

7.
```
fórmula(X):–
          append([&],Y,X),
          append(Y1,Y2,Y),
          fórmula(Y1),
          fórmula(Y2).
```

La fantástica aventura de Tom y Jim

16 de noviembre

Tom y Jim llegan a la conclusión de que el tiempo es una línea.

—Lo cual quiere decir que el principio de la causalidad es verdadero —dice Jim—. El tiempo no se desdobla. La causa está en todas partes.

—En absoluto —dice Tom tranquilamente—. Puede que el tiempo sea una línea, pero ello no implica que nada tenga causa. Vosotros los matemáticos siempre pensáis que la filosofía es simple. No lo es en absoluto; nosotros la hemos hecho muy complicada.

—¡Pero no hay libre albedrío! —exclama Jim—. No podemos afectar al futuro... ¡Sólo hay un futuro!

De nuevo, Tom no está de acuerdo con Jim. Si usted piensa que *no existe el libre albedrío*, vaya a la página 576. Si piensa que *existe el libre albedrío*, vaya a la página 576.

Lógica informal

LOS FORMULARIOS DE HACIENDA (PÁG. 338)

EJERCICIO

1. Maximizando la retención.

   Hoja de Cálculo de Exenciones Personales

   A 1
   B
   C 0 (quiere maximizar la cantidad a retener)
   D 2 (Geraldine y Bella)
   E
   F
   G 4

   No rellena la Hoja de Cálculo de Deducciones y Ajustes porque no quiere reducir su retención.

   Hoja de Cálculo de Dos trabajadores/Dos trabajos

   1. 4
   2. 5
   3.
   4. 5
   5. 4
   6. 1

7. 660
8. 660
9. 220 (es el Día del Trabajo, le quedan tres nóminas más durante el año)

Certificado de Retenciones de Ingresos de Empleados

5. 1
6. 220

2. Minimizando la retención.
Hoja de Cálculo de Exenciones Personales
A 1
B
C 1 (quiere minimizar la cantidad a retener)
D 2 (Geraldine y Bella)
E
F
G 5

Hoja de Cálculo de Deducciones y Ajustes

1. 14.500,34 (ver el 1040, línea 34; multiplicar por 1,05 para incrementarlo en un 5 %)
2. 6.200
3. 8.300,34
4. 0 (ver el 1040, línea 30)
5. 8.300,34
6. 2.707,54 (sumar las líneas 8a y 12 del 1040, multiplicar por 1,05)
7. 5.592,80
8. 2
9. 5
10. 7

No rellena la Hoja de Cálculo de Dos trabajadores/Dos trabajos porque quiere reducir sus retenciones.

Certificado de Retenciones de Ingresos de Empleados

5. 7

La aduana canadiense (pág. 348)

Pista: Sea bastante literal en la interpretación del documento. No presuponga que las reglas se pueden aplicar con liberalidad. En realidad, se pueden aplicar con bastante liberalidad (y de hecho, así se hizo), pero no es ése el objetivo del ejercicio. *Nota:* Jim no es residente en Canadá.

EL TÉ LÓGICO (PÁG. 349)

EJERCICIO

1. Sí, lo necesitan. Forman un establecimiento de servicio de comida (590.001(B)(17) y 590.052(A)(1)).
3. No, necesitan otro fregadero (590.013(C)).
5. Sí, tienen que hacerlo (590.009).
6. LaTina tiene que llevar cofia o redecilla para el pelo (590.010(B)) y tiene que tomarse el té en otra habitación (590.011(B)).

Nótese que el 590.030 está auto-referido.

LÓGICA COMERCIAL II (PÁG. 360)

Ésta es una reproducción de un correo recibido por uno de los autores. De hecho, recibió tres, cada uno ligeramente diferente... premios diferentes, números de resguardo diferentes, teléfonos 900 diferentes. Todos eran de Direct American Marketers, Inc.

La clave para entender este correo está en la letra pequeña, en donde se dan las probabilidades de ganar cada premio. Las de ganar cualquiera de los premios en metálico aparecen como de 1:4.998.468, o una entre casi cinco millones. Las de ganar un taco de cupones son 1:1, lo cual significa que todo el que recibe una notificación ha ganado este premio. Esencialmente, hay muy poca diferencia entre esto y recibir en el correo un sobre con cupones que probablemente no nos sean útiles.

(Es habitual que el apellido «Henle» esté mal escrito, pero deletreado «Hence» resultó novedoso y además ¡muy adecuado para un lógico!)[2]

Curiosidades y rompecabezas

The Digestor's Digest, PÁG. 6 (PÁG. 361)

Los rompecabezas del *Digest* se inspiraron en el libro de Raymond Smullyan *What Is the Name of This Book?* Otros libros de Smullyan: *The Lady or the Tiger?* (Knopf, 1985), *Forever Undecided* (Knopf, 1987), y un libro de acertijos filosóficos: *5000 BC and Other Philosophical Fantasies* (St. Martin's Press, 1983).

Ya metidos con Raymond Smullyan, tenemos que recomendar otros dos libros suyos, ahora desgraciadamente descatalogados: *The Chess Mysteries of Sherlock Holmes* (Knopf, 1979) y *The Chess Mysteries of Arabian Knights* (Knopf, 1981). No son problemas de ajedrez ordinarios; es «análisis retrógrado». En cada problema se presenta una posición de ajedrez y preguntas sobre cómo se ha llegado a esa posición. Un pregunta típica podría ser: «Es el turno de las blancas. ¿Cuál fue el último movimiento de las negras, y de las blancas?» *No es cuestión de estrategia*: la posición ha sido construida con tanto cuidado que

2. N. del T.: En inglés, *hence* significa «por tanto».

sólo hay una respuesta posible. Los problemas de Smullyan son deliciosos y sus explicaciones bellísimas deducciones.

«Lo que la Tortuga dijo a Aquiles», de Lewis Carroll (pág. 363)

Este pasaje apareció por primera vez en la revista filosófica *Mind* en 1895. La explicación estándar del mismo es que Carroll está demostrando la importancia de las reglas de inferencia... que sin algún tipo de mecanismo para producir conclusiones a partir de premisas nunca podríamos llegar a conclusión ninguna.

Esta explicación no está universalmente aceptada. William Warren Bartley III, editor de *Lewis Carroll's Symbolic Logic* (Potter, 1977), una edición anotada del *Symbolic Logic* de Carroll, no cree que estén claras ni la intención ni la importancia del pasaje. En el Apéndice C aparece una completa discusión sobre los puntos de vista de Carroll, junto con cartas suyas en las que discute el artículo.

La otra cara (pág. 366)

El chiste original de esta sección es del dibujante Gary Larson en *Chronicle Features*, San Francisco, CA, de su serie «The Far Side» (La otra cara).

La fantástica aventura de Tom y Jim

17 de noviembre

—¿Por qué el tiempo fluye hacia adelante? —pregunta Jim.

Tom responde:

—No lo hace. El tiempo simplemente es; no se mueve más que la ciudad de Chicago. El día 17 de noviembre es un punto en el tiempo igual que Chicago es un punto en el espacio.

—Pero: ¿acaso no nos movemos en el tiempo? ¿Y no es siempre un movimiento hacia adelante?

—En cada instante singular estamos en un único lugar. Es sólo que nos parece que nos movemos hacia adelante porque recordamos el pasado y no recordamos el futuro.

—¡Entonces podríamos cambiarlo si encontráramos alguna manera de conocer el futuro! —exclama Jim.

Luego sugiere consultar a los ingenieros del Sofista para cambiar de nuevo la forma de operar de la máquina. Una vez más, los ingenieros son capaces de hacer el cambio. Ahora la máquina del tiempo funciona de manera que sólo viajan al pasado sus contenidos, no el mundo exterior.

La intención de Jim es ir un día hacia adelante al futuro. Descubrirá lo que le suceda a Tom, se lo podrá decir, y Tom entonces tendrá recuerdos del futuro; y el flujo del tiempo quedará invertido. O al menos confundido.

Tom piensa que algo va a ir mal. Si usted también lo piensa, vaya a la página 566. Si no, vaya a la página 525.

8. COMPLETITUD, INCREDIBILIDAD, LOS DEBATES Y UNA CENA

Lógica formal: Completitud

GEOMETRÍA (PÁG. 367)

Respecto a la forma del espacio, aún podemos decir un poco más. Localmente, debido a la presencia de materia, el espacio es curvo, y la curvatura se puede y se ha medido. Pero es más excitante la pregunta de si el espacio es globalmente curvo (yendo hacia adelante en cualquier dirección, uno acabaría allí donde empezó). La opinión unánime es que sí, pero no hay prueba alguna. La distinción entre *curvatura local* y *global* es importante. El estado norteamericano de Colorado es una superficie localmente curva (tiene montañas), pero no lo es globalmente (vaya hacia adelante en cualquier dirección y acabará saliéndose de Colorado). En cambio, la superficie de la tierra es globalmente curva. Las teorías actuales mantienen que hay suficiente masa en el universo para curvar todo el espacio. No obstante, de momento, sólo se ha detectado una décima parte de la masa necesaria. No parece que nadie sepa dónde se encuentra el resto. (¿Ha limpiado usted recientemente debajo de la cama?).

Por cierto, la misma teoría que predice la curvatura del espacio también predice que el universo es finito. Uno de los autores de este libro prefiere la idea de un universo infinito, por lo que suele leer la sección científica del periódico con la misma esperanza y miedo que la de deportes.

Una referencia excelente en relación a la geometría que se discute en esta sección, y mucha más, es *Geometry and the Liberal Arts* (Penguin, 1976), de Dan Pedoe. Una buena referencia en relación a la geometría no euclídea y muchas de las cuestiones mencionadas aquí es *The Non-Euclidean Revolution* de Richard J. Trudeau (Birkhäuser, 1987).

EL TEOREMA DE COMPLETITUD (PÁG. 372)

La equivalencia entre implicación sintáctica y semántica es de gran ayuda para entender el descubrimiento de la geometría no euclídea. Cuando los matemáticos intentaban demostrar el quinto postulado a partir de los otros cuatro buscaban una implicación sintáctica. Como esto resultó ser extremadamente difícil, sospecharon que no era posible tal demostración, pero la tarea de demostrar que no había demostración debió parecerles inabarcable. Estos matemáticos no sabían de la existencia de la implicación semántica. Supuso un gran salto conceptual y filosófico el llegar a imaginar otros universos. Cuando se dió el salto, la imposibilidad de una implicación semántica en este caso (el descubrimiento de los universos de la geometría esférica e hiperbólica) llegó rápidamente.

La mitad del teorema de completitud de la lógica proposicional consiste en que cualquier fórmula que es una tautología debe ser demostrable mediante las reglas de deducción. Por supuesto, no se incluye entre las reglas a Taut., pues de lo contrario el teorema es trivial: si P es una tautología, he aquí una deducción utilizando Taut.:

P Taut.

Evidentemente, el auténtico significado de dicha mitad del teorema de completitud es que el uso de Taut. como regla está justificado. La completitud nos garantiza que la utilización de Taut. puede siempre reemplazarse por la utilización (quizás muy extensa) de las otras reglas.

Véase el clásico *Introduction of Mathematical Logic* de Elliot Mendelson (Van Nostrand, 1964) para un efoque diferente a este teorema.

EJERCICIO. Por ejemplo, la eliminación-$\vee$, si $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow C$ y $A \vee B$ son V, entonces C debe ser V: en primer lugar, bien A o bien B deben ser V, ya que

$A \vee B$ es V y $F \vee F$ es F. Si A es V entonces C es V, ya que $A \Rightarrow C$ es V y $V \Rightarrow F$ es F. Si B es V entonces C es V, ya que $B \Rightarrow C$ es V y $V \Rightarrow F$ es F. En ambos casos, C es V.

RETO

1.	P	premisa
2.	$\neg(\neg(\neg P \,\&\, Q) \vee R)$	supuesto
3.	$\neg\neg(\neg P \,\&\, Q) \,\&\, \neg R$	Taut., 2
4.	$\neg\neg(\neg P \,\&\, Q)$	&E, 3
5.	$(\neg P \,\&\, Q)$	¬E, 4
6.	$\neg P$	&E, 5
7.	$P \,\&\, \neg P$	&I, 1, 6
8.	$\neg(\neg(\neg P \,\&\, Q) \vee R) \Rightarrow (P \,\&\, \neg P)$	⇒I, 2-7
9.	$\neg\neg(\neg(\neg P \,\&\, Q) \vee R)$	¬I, 8
10.	$\neg(\neg P \,\&\, Q) \vee R$	¬E, 9

•

AXIOMATIZACIÓN Y ÁLGEBRA DE BOOLE (PÁG. 377)

Existen algunos motivos más para la axiomatización. Uno es la confianza. Después de cierto número de incidentes alarmantes (ver «La paradoja de Russell y la equivocación de Frege» en el capítulo 9), los matemáticos empezaron a preocuparse sobre la consistencia de sus hipótesis. Empezó a tomar importancia la especificación clara de las hipótesis que se utilizaban, saber que todos los que trabajasen en el campo de, por ejemplo, álgebras de Boole, lo hacían bajo las mismas hipótesis, de manera que pudiera acrecentarse la confianza en dichas hipótesis.

Un segundo motivo es estético. Es bonito saber que todo lo que uno hace se puede justificar a partir de unos pocos hechos básicos. A veces, los matemáticos utilizan la palabra «elegante» para describirlo. Es igualmente reconfortante si la lista de axiomas es mínima, si ninguno puede demostrarse a partir de los otros.

Hay docenas de sistemas de axiomas equivalentes para los álgebras de Boole. La mayoría no son mínimos. Nosotros elegimos uno bastante breve, y recomendamos su origen, *Boolean Algebra and Its Applications* de John Eldon Whitesit (Addison-Wesley, 1961), como una buena introducción. Nótese que el sistema no contiene la ley asociativa $(x \clubsuit (y \clubsuit z)) = ((x \clubsuit y) \clubsuit z)$; en el libro se demuestra, aunque lleva tres páginas hacerlo. De hecho, nosotros hemos sobrecargado el quinto axioma para poder acortar una de las demostraciones: no es necesario presuponer la unicidad de a', se puede demostrar. Una buena referencia para muchas de las cuestiones consideradas en este capítulo (así como en otras partes de este libro) es el clásico de Raymond Wilder *Introduction to the Foundations of Mathematics* (Wiley, 1952).

Era habitual entre los lógicos del siglo XIX imaginarse que la lógica formal representaba de hecho las «leyes del pensamiento», como Boole tituló su libro. Este punto de vista no ha desaparecido, ni mucho menos, a pesar del creciente reconocimiento de la complejidad de la mente humana. En realidad, sólo en los últimos veinte años ha aparecido una nueva disciplina, la ciencia cognitiva, cuyo objetivo es comprender la inteligencia tanto humana como artificial, las cuales en ningún caso se presuponen iguales.

Los psicólogos contemporáneos usan actualmente la lógica de forma descriptiva. Un buen ejemplo de ello es Jean Piaget, que expresa sus teorías del desarrollo mental describiendo la creciente habilidad de los niños para realizar operaciones lógicas. En su libro *Logic and Psychology* (Basic Books, 1957), Piaget recuerda una época de desentendimiento entre psicólogos y lógicos: «Así, se utilizaba la lógica en las explicaciones causales de los mismos hechos psicológicos. A este uso falaz de la lógica en psicología se le dio el nombre de «logicismo»...» (pág. 1) y «... una de las tareas fundamentales de los más recientes lógicos ha sido eliminar del campo de la lógica cualquier mención a la intuición, lo que es lo mismo que decir al factor psicológico. Cuando se recurre a tales factores en lógica la falacia se denomina «psicologismo» » (pág. 2).

Puede que el lector se haya dado cuenta de un interesante fenómeno en los axiomas del álgebra de Boole: tienen una especie de equilibrio simétrico entre $\clubsuit$ y $\spadesuit$. De hecho, si se intercambian estos dos símbolos y también se intercambian $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$, resulta que en realidad no se ha cambiado nada. Lo que esto quiere decir es que todo lo que se demuestre para $\clubsuit$, $\spadesuit$, $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$ es también cierto para $\spadesuit$, $\clubsuit$, $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$. Por ejemplo, ya hemos demostrado que $(a \clubsuit b)' = a' \spadesuit b'$, por lo que también sabemos que $(a \spadesuit b)' = a' \clubsuit b'$. A esto se lo conoce como el principio de *dualidad*, y puede resultar muy útil.

EJERCICIOS

1. $1' = 0,\ 0' = 1$

3. $c' = f,\ f' = c$
   $d' = b,\ b' = d$
   $a' = e,\ e' = a$

5. Sin utilizar Taut., lo mejor que se puede hacer es una demostración de 38 líneas.

7. $$\begin{aligned} \mathbf{1} &= a \spadesuit a' && \text{axioma 5}\\ &= a \spadesuit (a' \clubsuit \mathbf{1}) && \text{axioma 4}\\ &= (a \spadesuit a') \clubsuit (a \spadesuit \mathbf{1}) && \text{axioma 2}\\ &= \mathbf{1} \clubsuit (a \spadesuit \mathbf{1}) && \text{axioma 5}\\ &= a \spadesuit \mathbf{1} && \text{axioma 4}\\ &= \mathbf{1} \spadesuit a && \text{axioma 1} \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} (a \clubsuit b) \clubsuit a' &= a' \clubsuit (a \clubsuit b) && \text{axioma 1}\\ &= \mathbf{0} \spadesuit (a' \clubsuit (a \clubsuit b)) && \text{axioma 3}\\ &= (a \clubsuit a') \spadesuit (a' \clubsuit (a \clubsuit b)) && \text{axioma 5}\\ &= (a' \clubsuit a) \spadesuit (a' \clubsuit (a \clubsuit b)) && \text{axioma 1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a' \clubsuit (a \spadesuit (a \clubsuit b)) && \text{axioma 2}\\
&= a' \clubsuit ((a \clubsuit \mathbf{1}) \spadesuit (a \clubsuit b)) && \text{axioma 4}\\
&= a' \clubsuit (a \clubsuit (\mathbf{1} \spadesuit b)) && \text{axioma 2}\\
&= a' \clubsuit (a \clubsuit \mathbf{1}) && \text{lema 1}\\
&= a' \clubsuit a && \text{axioma 4}\\
&= \mathbf{0} && \text{axioma 5}
\end{aligned}
$$

11. $(a \clubsuit b) \spadesuit (a' \spadesuit b')$

$$
\begin{aligned}
&= (a' \spadesuit b') \spadesuit (a \clubsuit b) && \text{axioma 1}\\
&= ((a' \spadesuit b') \spadesuit a) \clubsuit ((a' \spadesuit b') \spadesuit b) && \text{axioma 2}\\
&= (a \spadesuit (a' \spadesuit b')) \clubsuit (b \spadesuit (a' \spadesuit b')) && \text{axioma 1}\\
&= (a \spadesuit (a' \spadesuit b')) \clubsuit (b \spadesuit (b' \spadesuit a')) && \text{axioma 1}\\
&= \mathbf{1} \clubsuit \mathbf{1} && \text{lema 4}\\
&= \mathbf{1} && \text{axioma 5}
\end{aligned}
$$

La fantástica aventura de Tom y Jim

18 de noviembre

Si sigue usted haciendo las elecciones menos arriesgadas no va a resultar nada divertido.

RETO. Escriba usted mismo una aventura que le satisfaga con este tipo de máquina del tiempo. •

Cerca y Acerca de la lógica

CREENCIAS Y CONOCIMIENTOS (PÁG. 383)

La cita de san Agustín al comienzo de este capítulo refleja su lenta aceptación del cristianismo y sus ocasionales dudas. La «ayuda» que solicita es en esencia «alivio». Fue dicho en un momento de creencia, en anticipación de momentos de duda. Contrástese con el remedo «Señor, no creo; ayúdame en mi incredulidad» (Samuel Butler). El significado es completamente distinto y también paradójico.

Un ejemplo será suficiente para mostrar las dificultades de CC: considérese a una persona que tiene prejuicios raciales pero cree que no los tiene.

RETO 1. $\forall x \neg \exists p (Bxp \,\&\, Bx\neg p)$ es equivalente a $\forall x \forall p\ \neg (Bxp \,\&\, Bx\neg p)$ por CE2, capítulo 5, o por «Razonamiento hipotético: deducción a partir de supuestos» en el capítulo 6. $\neg (Bxp \,\&\, Bx\neg p)$ es equivalente por tablas de verdad a $Bxp \Rightarrow \neg Bx\neg p$. •

RETO 3. Por LC, x cree $(p \,\&\, q) \Rightarrow q$, puesto que ésta es una tautología. Por MPC, se sigue que x cree q. •

ROMPECABEZAS. Dar una creencia propia falsa es caer víctima de una versión de la paradoja de Moore: ¡P pero yo no lo creo! ¿Cómo se puede seguir creyendo en P si se cree que es falso?

RETO 5. Si Kxp, entonces p es verdadero por la CV. Si presuponemos $Kx'\neg p'$, entonces $\neg p$ por CV. De manera que tenemos $p \,\&\, \neg p$. Así, $Kx'\neg p' \Rightarrow (p \,\&\, \neg p)$ por ⇒I y por tanto $\neg Kx'\neg p'$ por ¬I. Así pues, $Kxp \Rightarrow \neg Kx'\neg p'$. •

LA LEY DEL TERCERO EXCLUIDO (PÁG. 387)

El intuicionismo tiende a ser demasiado restrictivo: deja fuera ciertas prácticas habituales cuando se aplica a las matemáticas, y por lo general desaprueba más que aprueba. Debido a limitaciones lógicas, los intentos de hacer matemáticas de manera constructiva por lo general no han producido gran cosa. En años recientes, sin embargo, ha habido progresos reales. =ltimamente, Errett Bishop ha desarrollado una teoría constructiva de los números reales que ha sido capaz de acomodar una parte considerable de las matemáticas.

He aquí un ejemplo de las dificultades. Un intuicionista, o constructivista, puede llegar a rechazar un número real si no se encuentra un procedimiento para desarrollar la expansión decimal de dicho número tanto como sea necesario. La fracción 2/9 no presenta problemas, puesto que es 0,2222..., e incluso existen algoritmos para calcular los dígitos de π descubiertos hace miles de años. Por otra parte, considérese el número cuyo dígito n-ésimo es bien 0 o bien 1, y es 1 sólo si hay n sietes consecutivos en la expansión decimal de π. En la actualidad no existe método alguno para ir desarrollando los dígitos de este número. Para un intuicionista, las palabras anteriores no definen un número.

En la interpretación clásica, el número de los reales es incontable. El número de procedimientos para describir reales, sin embargo, es contable. Así que hay muchos menos reales constructivos que reales. El lector interesado debería consultar *Constructive Analysis*, de Errett Bishop y Douglas Bridges (Springer-Verlag, 1985).

RETO 1. El enunciado «Cruzaré la calle sin problemas» es, por la ley del tercero excluido, verdadero o falso antes incluso de que cruce. Si es verdadero, no hay necesidad alguna de que tenga cuidado. Si es falso, tener cuidado no sirve de nada. •

RETO 3. $V \vee I$ es V: Si pensamos en I como bien V o bien F pero no sabemos cuál, entonces vemos que da lo mismo. Independientemente del valor de I, el enunciado es verdadero, ya que tanto $V \vee V$ como $V \vee F$ son verdad.

$F \vee I$ es I: En este caso el valor de I sí es relevante. $F \vee V$ es V pero $F \vee F$ es F. Así pues, el valor de verdad de $F \vee I$ está tan indeterminado como el de I.

$V \,\&\, I$ es I: Este caso es similar a $F \vee I$. El valor de verdad depende de la verdad o falsedad de I.

$F \,\&\, I$ es F: Independientemente de lo que resulte ser I, sabemos que $F \,\&$ cualquier cosa es F, así que $F \,\&\, I$ es F. •

EJERCICIO. Ver Reto 2 en «Razonamiento hipotético: deducción a partir de supuestos» en el capítulo 6.

DEL ROMPECABEZAS A LA PARADOJA (PÁG. 392)

Hemos resuelto la paradoja del examen sorpresa utilizando el predicado del conocimiento. Para algunos, ésta es un arma demasiado potente. Después de todo, es difícil saber qué es el conocimiento.

Es más fácil creer en las creencias, y se puede llegar esencialmente a las mismas conclusiones con el predicado de creencia. Utilizamos como axiomas:

LC: $B(p)$ para toda tautología p
MPC: $(B(p) \,\&\, B(p \Rightarrow q)) \Rightarrow B(q)$ (*modus ponens* de las creencias)
CoC: $B(p) \Rightarrow \neg B(\neg p)$ (consistencia de las creencias)
CC: $B(p) \Rightarrow B(B(p))$

El último axioma puede resultar algo dudoso (ver «Creencias y conocimientos»), pero sigamos adelante. Supongamos que el profesor dice:

$$T \,\&\, \neg B(T) \tag{1'}$$

Con esta hipótesis, usando sólo LC y MPC, podemos derivar una contradicción a partir de:

$$B(T \,\&\, \neg B(T)) \tag{2'}$$

La demostración es idéntica a la dada para el predicado del conocimiento, que utiliza sólo LS y MPS (Reto 3).

Utilizando LS, MPS y CV, derivábamos una contradicción a partir únicamente de $K(T \,\&\, \neg K(T))$. Podemos hacer algo semejante con la creencia:

1.	$B(T \,\&\, \neg B(T))$	premisa
2.	$B(T)$	LC,MPC,1
3.	$B(\neg B(T))$	LC,MPC,1
4.	$B(B(T))$	CC,2

La demostración contradice CoC.

Si aun así, al lector no le convencen las creencias, le podemos ofrecer la duda. ¿Cómo podemos decir que dudamos de p? Decir que creemos la negación de p sería demasiado. Sencillamente, decimos que no creemos p: $\neg B(P)$. Ahora, en lugar de CoC y CC, supongamos que tomamos la mucho más suave DD:

$$\text{DD: } B(p) \Rightarrow \neg B(\neg B(p))$$

CC establece que si se cree en p entonces se cree que se cree. DD establece que si se duda de p entonces se duda de que se duda, que ciertamente es una afirmación menos extremista. Lo bueno es que ahora podemos resolver el examen sorpresa con sólo LC, MPC y DD. Lo dejamos como ejercicio (*Pista:* Empiece como antes).

RETO 3

1. $T \,\&\, \neg K(T)$	premisa
2. $K(T \,\&\, \neg K(T))$	premisa
3. $K(T)$	de 2, como en el texto
4. $\neg K(T)$	&E, 1
5. $K(T) \,\&\, \neg K(T)$	&I, 3, 4

•

El ensayo de Montague y Kaplan «Una paradoja recuperada» (*A Paradox Regained*) se publicó por primera vez en *Notre Dame Journal of Formal Logic* 1:79-90 (1960).

Lógica informal

MÁS SOBRE BUSH, CLINTON Y PEROT (PÁG. 400)

RETO

1. La pregunta de si se debe culpar a la profesión médica queda sin respuesta. La utilización por Clinton de las palabras «premisa» y «conclusiones» parece un intento de dar a su argumentación un áura lógica. El problema está en que tiene varias premisas. Además, su primera conclusión no parece una conclusión, sino más bien otra premisa.
   Aparte de esto, Clinton sí señala con detalle varios problemas concretos, y propone una serie de pasos para resolverlos, también con bastante detalle. Sus propuestas son relevantes, y la forma de citar los casos de Hawai y Rochester le da un buen apoyo.
2. Bush sí responde a la pregunta... con un escueto no. Como Clinton, señala algunos problemas de la sanidad y resalta su plan para resolverlos.
3. Perot comienza discutiendo la sanidad, pero dedica la mayor parte de su tiempo a atacar al sistema político por permitir que los intereses particulares ejerzan tanta presión sobre el Congreso. En consecuencia, no responde a ninguna de las preguntas originales.
4. Bush replica de forma directa a la cuestión sobre la Seguridad Social, pero en las otras dos comienza a divagar. En lugar de planificar el futuro de las pensiones y de Medicare, sugiere mejorar la economía, presumiblemente a fin de que si el sistema se arruina, seamos capaces de arreglarlo.
5. Perot toma por el mismo tipo de senda que Bush, excepto que además sugiere que los problemas son fáciles de resolver. Luego señala otras dificultades del sistema financiero de la nación. En ningún caso considera directamente las preguntas realizadas, uniéndose finalmente a Bush en el sentido de acabar hablando de economía.
6. En general, Clinton se une a sus rivales en lo de discutir de economía. Contradice a Perot en el tema de la dificultad de los problemas. También señala que la confianza de Bush en las garantías federales ignora un serio problema. Por otra parte, no ofrece plan o solución algunos, excepto por la última frase, que resulta bastante vaga. •

DEBATES PRESIDENCIALES (PAG. 405)

EJERCICIOS. Ejemplos de respuestas:

1. Senadora Snort, usted es bien conocida por sus propuestas encaminadas a reducir las discriminaciones por género, y en general, apoya la igualdad de los géneros. ¿Quiere esto decir que estaría a favor de un servicio militar obligatorio que incluya a las mujeres?
2. Mr. Snodgrass, ahora mismo tengo una propuesta en el Senado para reintroducir el servicio militar obligatorio. La propuesta contiene cláusulas tanto para hombres como para mujeres, pero las cláusulas son diferentes, como son ciertamente diferentes hombres y mujeres. Siento que todos nuestros jóvenes tienen el privilegio de ser miembros de esta sociedad y le deben el ponerse a su servicio. Las mujeres pueden servir de muchas maneras. En mi propuesta, las mujeres pueden unirse a las fuerzas armadas en actividades que no son de combate, pero también pueden servir a la nación en casa, como ayudantes de enfermeras en hospitales para veteranos, como personal en centros gubernamentales de ayuda, o como profesoras en escuelas públicas.
3. El plan de la senadora hace patente su distorsionada visión del lugar de la mujer en nuestra sociedad. Me gustaría recordarle que el camino que a ella la ha llevado al Senado de los EE.UU. no está abierto para todo el mundo. Muy pocas mujeres capaces, con energía, como ella y yo, han tenido la suerte de casarse con un senador de los EE.UU. con cáncer terminal. Yo no tuve esa suerte. Yo fuí elegida, no nombrada. Tuve que abrirme camino subiendo cada peldaño de la escalera política, y ahora no estaría aquí delante de ustedes, liderando mi estado, si me hubiera dejado ahogar por los legisladores en almohadas de seda y cojines de plumas.

DEBATES PARLAMENTARIOS (PÁG. 408)

En nuestra clase de lógica solemos tener alumnos del equipo de debate parlamentario de Smith. Por lo general, son alumnos de diez.

LÓGICA COMERCIAL III (PÁG. 412)

Estamos en deuda con Doug Cooper por habernos hecho notar la significación lógica de las instrucciones de los champús. Un ejemplo similar aparece en su reciente libro *Oh! My! Modula-2!* (Norton, 1990), bajo el epígrafe «Por qué el científico informático no pudo salir de la ducha».

Curiosidades y rompecabezas

The Digestor's Digest, PÁG. 7 (PÁG. 411)

RETO. ¡RETO ESPECIAL! Escriba su propia página de The Digestor's Digest. •

Los puntos de Peano (pág. 412)

En la cita, lord Churchill se refiere a los puntos decimales.

El esquema de puntos que utilizamos en esta parte es el que utilizó Quine en su clásico *Mathematical Logic*, edición revisada (Harvard University Press, 1951).

Reto

1. $(\sigma \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow ((\chi \,\&\, \psi) \Rightarrow \neg\theta)$
3. $\varphi \,\&\, ((\forall x \psi \Rightarrow \gamma) \vee \sigma)$
5. $((\sigma \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta))) \,\&\, \neg(((\gamma \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \sigma)) \Rightarrow \theta)$
6. $((\gamma \vee (\theta \,\&\, \psi)) \Rightarrow \chi) \,\&\, (((\varphi \Rightarrow \sigma) \Leftrightarrow \alpha) \,\&\, \sigma)$
7. $\sigma \supset \chi .\equiv \theta$
9. $(x) \sim (y) \sim (z)(\sigma \equiv : \varphi \supset \chi : \psi :. \vee\theta)$
10. $\gamma \vee \sigma .\supset. \theta : \varphi \supset \chi :: \chi \supset \psi :. \varphi \equiv \theta :\supset \sigma)$ •

Charles Dana Gibson (pág. 413)

No es difícil comprobar, utilizando tablas de verdad, que $\neg(Fc \Rightarrow Pcm) \therefore Fc$[3] es un argumento válido. Una deducción formal (sin Taut.) es algo más larga:

Reto

1.	$\neg(Fc \Rightarrow Pcm)$				premisa
2.		$\neg Fc$			supuesto
3.			Fc		supuesto
4.				$\neg Pcm$	supuesto
5.				$Fc \,\&\, \neg Fc$	&I, 2, 3
6.			$\neg Pcm \Rightarrow (Fc \,\&\, \neg Fc)$		⇒I, 4-5
7.			$\neg\neg Pcm$		¬I, 6
8.			Pcm		¬E, 7
9.		$Fc \Rightarrow Pcm$			⇒I, 3-8
10.		$(Fc \Rightarrow Pcm) \,\&\, \neg(Fc \Rightarrow Pcm)$			&I, 1, 9
11.	$\neg Fc \Rightarrow ((Fc \Rightarrow Pcm) \,\&\, \neg(Fc \Rightarrow Pcm))$				⇒I, 2-10
12.	$\neg\neg Fc$				¬I, 11
13.	Fc				¬E, 12 •

La reunión familiar II: las mujeres (pág. 413)

Esperamos que ya haya resuelto este caso y esté mirando aquí sólo para comprobar la respuesta. De todos modos, si lo ha dejado por imposible, aquí va una pista: utilice el formulario. Comience por marcar las filas Madeleine, Madge,

3. N. del T.: *Fc* por «Charles es un tonto» y *Pcm* por «A Charles pronto le separarán de su dinero (m)».

Madame, Madonna, Madeira, Edwin, Edgar, Eduardo, Edsel, el loco Eddie, asiento 1, asiento 2, asiento 3, asiento 4 y asiento 5. Marque las columnas langosta, anchoas, tortilla, repollo, Big Mac, asiento 1, asiento 2, asiento 3, asiento 4, asiento 5, Edwin, Edgar, Eduardo, Edsel y el loco Eddie.

Más pistas: echando un vistazo a «La reunión familiar» en el capítulo 4 descubrirá con quién se casó Madeleine y con quién vive Madonna. Después de haber introducido todos los datos que pueda, descubrirá que parece haber sólo dos sitios en los que pueda sentar a Madeleine. Compruébelos. Uno funciona y el otro no.

RESPUESTAS

Madeleine está casada con el loco Eddie. Comió los crepes de anchoa y se sentó en el número 4.

Madge está casada con Edgar. Comió langosta y se sentó al lado de usted.

Madame está relacionada con Edwin. Comió repollo hervido y se sentó a su derecha.

Madonna está viviendo con Eduardo. Se tomó la Big Mac y se sentó en el número 2.

Madeira sale con Edsel. Se tomó su tortilla de levadura sentada delante de usted.

9. PARADOJA, IMPOSIBILIDAD Y LA LEY

Lógica formal: profundizando en la lógica

¿DE DÓNDE VIENEN LOS NÚMEROS? (PÁG. 417)

RETO 1

a. Han vuelto menos ovejas de las que salieron por la mañana.

b. Han vuelto más ovejas de las que salieron por la mañana.

c. No, sólo que ha vuelto el mismo número de ellas. •

RETO 3. Pida a los chavales que se emparejen; compruebe luego que cada chico está emparejado con una chica y cada chica con un chico. •

RETO 5

a. $\exists h(\forall x(Fx \Rightarrow F(hx))\,\&\,\forall x\forall y(x \neq y \Rightarrow hx \neq hy)\,\&\,\forall x(Fx \Rightarrow \exists y(Fy\,\&\,hy = x)))$

b. Hay tres cláusulas. En primer lugar, tenemos $\forall x(Fx \Rightarrow F(ix))$. Evidentemente, ésta es cierta, puesto que $x = ix$. La segunda es que $\forall x\forall y(x \neq y \Rightarrow ix \neq iy)$. De nuevo, el hecho de que $x = ix$ e $y = iy$ hace a ésta trivial. Finalmente, $\forall x(Fx \Rightarrow \exists y(Fy \,\&\, iy = x))$. La última parte dice que, para algún y, Fy y $iy = x$. Evidentemente, $y = x$ satisface ambas cosas, así que desde luego que existe y tal, en concreto x. •

RETO 7. Hay tres cláusulas que comprobar para determinar si jh es una correspondencia 1-1: $\forall x(Fx \Rightarrow H(jhx))$, $\forall x\forall y(x \neq y \Rightarrow jhx \neq jhy)$, $\forall x(Hx \Rightarrow \exists y(Fy\,\&\,jhy = x))$.

1.	$\forall x(Fx \Rightarrow G(hx))$	premisa
2.	$\forall x(Gx \Rightarrow H(jx))$	premisa
3.	$\quad Fx$	supuesto
4.	$\quad Fx \Rightarrow G(hx)$	$\forall$E, 1
5.	$\quad G(hx) \Rightarrow H(j(hx))$	$\forall$E, 2
6.	$\quad G(hx)$	$\Rightarrow$E, 3, 4
7.	$\quad H(j(hx))$	$\Rightarrow$E, 5, 6
8.	$\quad H(jhx)$	(definición de jh)
9.	$Fx \Rightarrow H(jhx)$	$\Rightarrow$I, 3-8
10.	$\forall x(Fx \Rightarrow H(jhx))$	$\forall$I, 9

1.	$\forall x \forall y(x \neq y \Rightarrow hx \neq hy)$	premisa
2.	$\forall x \forall y(x \neq y \Rightarrow jx \neq jy)$	premisa
3.	$\quad x \neq y$	supuesto
4.	$\quad x \neq y \Rightarrow hx \neq hy$	$\forall$E, 1 (dos veces)
5.	$\quad hx \neq hy \Rightarrow j(hx) \neq j(hy)$	$\forall$E, 2 (dos veces)
6.	$\quad j(hx) \neq j(hy)$	$\Rightarrow$E (dos veces) 3, 4, 5
7.	$\quad jhx \neq jhy$	(definición de jh)
8.	$x \neq y \Rightarrow jhx \neq jhy$	$\Rightarrow$I, 3-7
9.	$\forall x \forall y(x \neq y \Rightarrow jhx \neq jhy)$	$\forall$I, 8 (dos veces)

1.	$\forall x(Gx \Rightarrow \exists y(Fy \,\&\, hy = x))$	premisa
2.	$\forall x(Hx \Rightarrow \exists y(Gy \,\&\, jy = x))$	premisa
3.	$Hx \Rightarrow \exists y(Gy \,\&\, jy = x)$	$\forall$E, 2
4.	$\quad Hx$	supuesto
5.	$\quad \exists y(Gy \,\&\, jy = x)$	$\Rightarrow$E, 3, 4
6.	$\quad Gc^* \,\&\, jc^* = x$	$\exists$E, 5
7.	$\quad Gc^* \Rightarrow \exists y(Fy \,\&\, hy = c^*)$	$\forall$E, 1
8.	$\quad Gc^*$	&E, 6
9.	$\quad jc^* = x$	&E, 6
10.	$\quad \exists y(Fy \,\&\, hy = c^*)$	$\Rightarrow$E, 7, 8
11.	$\quad Fd^* \,\&\, hd^* = c^*$	$\exists$E, 10
12.	$\quad Fd^*$	&E, 11
13.	$\quad hd^* = c^*$	&E, 11
14.	$\quad jhd^* = x$	=E, 9, 13
15.	$\quad Fd^* \,\&\, jhd^* = x$	&I, 12 ,14
16.	$\quad \exists y(Fy \,\&\, jhy = x)$	$\exists$I, 15
17.	$Hx \Rightarrow \exists y(Fy \,\&\, jhy = x)$	$\Rightarrow$I, 4-16
18.	$\forall x(Hx \Rightarrow \exists y(Fy \,\&\, jhy = x))$	$\forall$I, 17 •

Al final de esta sección se da un argumento a favor de que el número de cuadrados de números $(1, 4, 9, \ldots)$ es el mismo que el de números naturales $(1, 2, 3, \ldots)$, consistente en mostrar una función 1-1 sobre de uno en el otro. Se da otro argumento en el sentido de que el número de cuadrados es menor que el de naturales, mostrando una función 1-1 del primero en (pero no sobre) el segundo. ¿Puede el lector encontrar un argumento que muestre que el número de cuadrados es mayor que el de naturales?

Otro enfoque para construir números consiste en hacerlo a partir de los objetos más primitivos de todos, los conjuntos. El primer número, 0, es el conjunto vacío, $\{\}$. El segundo número, 1, se define como un conjunto con un único elemento, $\{0\}$, o $\{\{\}\}$. Este último puede parecer extraño, ¿qué es? Es un conjunto con un elemento y ese elemento es el conjunto vacío. $\{\{\}\}$ no está vacío, ¡tiene un elemento!

¿Cuál es el 2? Debe de ser un conjunto con sólo dos elementos, pero ¿cuáles? Elegimos el 0 y el 1, esto es, $2 = \{0, 1\}$, o $\{\{\}, \{\{\}\}\}$. Nótese que cada nuevo elemento cuesta como dos veces más de escribir que el anterior si se utilizan sólo llaves y comas. El número 3 es $\{0, 1, 2, \}$, o $\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$. Utilizando un procesador de texto no es difícil escribir:

4 es $\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\}\}\}$

5 es $\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\}\}\}\}$

6 es $\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\},\{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\}\}\}\}\}$

y así sucesivamente.

Resulta muy elegante, pero sólo estamos arañando la superficie. A partir de estos números podemos construir fracciones, decimales, incluso números infinitos. Una referencia en relación a este desarrollo es *An Outline of Set Theory* de J. M. Henle (Springer-Verlag, 1986).

LA PARADOJA DEL MONTÓN DE ARENA (PÁG. 425)

RETO 2. Considérese el universo de los números naturales. Sea Fx «x es mayor que 17», sea fx, $x+1$, sea c, 20, y d, 5. Puesto que es posible que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa, el teorema de completitud (capítulo 8) nos garantiza que no puede haber deducción sintáctica. •

RETO 4. $Va \vee \neg Va$ es verdadero porque es una ley de la lógica y por tanto se satisface para todos los predicados precisos. Va no es verdadero, ya que podemos establecer la concretización P de forma que Px es verdadero sii Vx lo es. Entonces P es una concretización de V y Pa es falso. Va no es falso, ya que podemos establecer la concretización P' de forma que $P'x$ es verdadero sii Vx no es falso. Entonces, de nuevo, P' es una concretización de V, y $P'a$ es verdadero. Puesto que algunas concretizaciones lo hacen verdadero y otras falso, Va ni es verdadero ni falso, y lo mismo ocurre para $\neg Va$. •

RETO 5. Ver «Razonamiento hipotético: deducción a partir de supuestos» en el capítulo 6. •

LA PARADOJA DE RUSSELL Y LA EQUIVOCACIÓN DE FREGE (PÁG. 434)

RETO 1. A partir del enunciado conclúyase que $\forall x(x \in c^* \Leftrightarrow \neg(x \in x))$, y a partir de ésta conclúyase que $c^* \in c^* \Leftrightarrow \neg(c^* \in c^*)$, una contradicción por su tabla de verdad.

Los comentarios de Russell respecto a Frege están contenidos en una carta a Jean van Heijenoortl publicada en *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, de este último (Harvard University Press, 1967), pág. 127.

Una lectura recomendable sobre los modernos enfoques a las cuestiones de la existencia matemática, conjuntos y paradojas es *New Directions in Philosophy of Mathematics: An Anthology*, editado por T. Tymoczko (Birkhäuser, 1986).

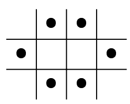
Cerca y Acerca de la lógica

LA VIDA (PÁG. 439)

Para más detalles de Vida, incluyendo el conspicuo trabajo de Conway, véase *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, volumen 2, de Berlekamp, Conway y Guy (Academic Press, 1982). Se puede encontrar otra presentación más en *The Recursive Universe*, de William Poundstone (Contemporary Books, 1985).

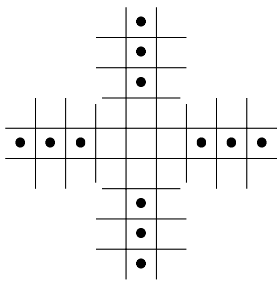
EJERCICIO

1. (nada)

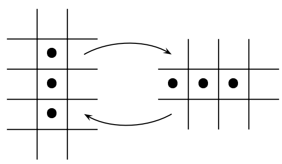
2. 

(«avispero»)

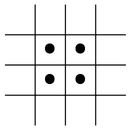
3. Cuatro intermitentes



(«semáforo»)

4. 

(llamado «intermitente»)

5. 

(«ladrillo»)

6. «planeador»
Se reproduce a sí mismo una celda a la derecha y otra abajo tras cuatro generaciones.

Ed Fredkin es una persona fascinante, empresario, científico y filósofo. Es uno de los tres científicos cuyos perfiles aparecen en *Three Scientists and Their Gods* (Times Books, 1988), de Robert Wright.

La fantástica aventura de Tom y Jim

16 de noviembre

Bertrand Russell consideró también la cuestión del libre albedrío. Partió de la peor suposición: que el futuro está ya fijado, dado el pasado. Hizo notar que aunque posiblemente nunca supieramos predecir completamente el futuro, no podemos reconfortarnos con eso. Aun así, él no tenía miedo de perder el libre albedrío.

Lo que debemos temer todos (la raza humana) es vernos sometidos a fuerzas externas. La causalidad, sin embargo, no supone sometimiento. La clave está en que, de todos modos, hacemos lo que elegimos hacer.

Una vez más, Russell consideró el peor caso posible. Supuso que existieran seres que podían ver el futuro y supieran que es inmutable. ¿Verían estas criaturas el futuro con sentimientos de tristeza e impotencia? Russell decía que no. Al conocer sus actos futuros, conocerían también las motivaciones de los mismos. Tales motivaciones serían genuinamente razonables, ya que todas las decisiones estarían perfectamente informadas por las consecuencias de los mismos actos.

Russell concluía que el aspecto más importante del libre albedrío, verse libre de coerción, saber que los propios actos se toman por propia voluntad, permanecía intacto.

Vaya a la página 490.

EL HIPERJUEGO (PÁG. 445)

¿Cuál es la explicacion de esta paradoja? ¡Si definimos un juego por el conjunto de todas sus posibles partidas entonces no existe un conjunto que corresponda al hiperjuego! Como en los casos del barbero y del conjunto de Russell, el lenguaje nos engaña haciéndonos creer que debe existir un objeto que es en realidad imposible.

Parte del encanto de la paradoja del hiperjuego, sin embargo, está en que es diferente a las otras; es asimétrica. En la paradoja de Russell se demuestra $R \in R \Rightarrow R \notin R$ y también $R \notin R \Rightarrow R \in R$; ninguna de las dos depende de la otra. En la paradoja del hiperjuego es necesario demostrar *primero* que hiperjuego es un juego finito: ¡Es necesario para demostrar que hiperjuego no es un juego finito!

El castor afanoso no es computable (pág. 446)

En Notas, referencias bibliográficas, pistas y algunas respuestas de «El castor afanoso» le prometimos más programas de veinte líneas. Aquí van unos pocos.

Un cambio pequeño consiste en añadir una línea a una máquina duplicadora para convertirla en cuadruplicadora, como en lo que sigue (recuerde que «$z = z + 5$» es una abreviatura de otras cinco líneas cada una con «$z = z + 1$»):

$$\begin{array}{l}
x = x + 1 \\
z = z + 5 \\
\text{if } x = 0 \\
x = x - 1 \\
y = y + 2 \\
\bullet \\
\text{if } y = 0 \\
y = y - 1 \\
x = x + 2 \\
\bullet \\
\text{if } z = 0 \\
z = z - 1 \\
\bullet \\
\text{stop}
\end{array}$$

Así, en lugar de obtener $2^7 = 128$, obtenemos $4^6 = 4.096$. Lo siguiente es mover las dos apariciones de $+2$ algo más arriba, modificando la máquina cuadruplicadora para dar:

$$\begin{array}{l}
y = y + 2 \\
\text{if } x = 0 \\
x = x - 1 \\
\bullet \\
x = x + 2 \\
\text{if } y = 0 \\
y = y - 1 \\
\bullet
\end{array}$$

Conseguimos así un poquito más. Empezando con $x = 0$, una pasada por el programa nos da $x = 6$, otra más nos da $x = 30$, luego $x = 126$, después $x = 510$.

Lo que estamos calculando es $2^3-2, 2^5-2, 2^7-2$,... Como ahora no necesitamos el «$x = x + 1$» al principio podemos poner:

$z = z + 6$
$y = y + 2$
if $x = 0$
$x = x - 1$

$x = x + 2$
if $y = 0$
$y = y - 1$

if $z = 0$
$z = z - 1$

stop

¡Con este pequeño cambio aumentamos el valor del resultado a $2^{15} - 2 =$ $= 32.766$!

Nuestro contador es la variable z; es la que gobierna el número de veces que recorremos el bucle quadruplicador. Para hacerlo *verdaderamente* sutil intentemos incrementar z con un «$z = z+1$» dentro de alguno de los bucles. Pero tenemos que ser muy cuidadosos, porque si dejamos que z se vea incrementada sin límite el programa no parará.

$y = y + 2$
if $x = 0$
$x = x - 1$

$z = z + 4$
$x = x + 2$
if $y = 0$
$y = y - 1$
if $a = 0$

if $z = 0$
$z = z - 1$
$a = a + 1$

stop

Habrá notado que se puede incrementar z sólo cuando a vale 0 (de lo contrario nunca se llega a «$z = z + 4$»). Al comienzo, a es 0, por supuesto, pero tan pronto como hayamos atravesado el bucle quadruplicador una vez, a pasa a 1, de forma que z (que llegó hasta 6 antes, y ahora alcanza el valor 8) no seguirá incrementándose. Este programa finaliza con x en los $2^{19}-2 = 524.286$.

¿Un número grande? ¡En realidad no! Aquí tiene otro programa, y es seguro que se pueden obtener números aún mayores.

$a = a + 4$
$y = y + 2$
if $x = 0$
$x = x - 1$

$z = z + 1$
$x = x + 2$
if $y = 0$
$y = y - 1$
if $a = 0$

if $z = 0$
$z = z - 1$
$a = a - 1$

stop

Este sí es grande, o al menos eso pensamos nosotros. Llega hasta 2^{646} = 291.996.199.527.820.493.993.094.982.764.818.644.793.166.624.463.907.865.557.068.321.145.553.610.701.355.352.736.378.419.924.311.769.585.833.107.812.710.042.067.884.077.102.168.028.031.888.170.324.462.221.708.048.127.659.159.056.956.805.303.948.303.782.641.662.

La fantástica aventura de Tom y Jim

14 de noviembre

A Tom le preocupa la forma en que funciona la máquina.

—Cuando vuelves del futuro o del pasado, ¿estás seguro de que lo recuerdas? —pregunta—. ¿Qué significa «volver al presente»? ¿No significa acaso volver a tu estado anterior?, y tu estado anterior no tiene memoria del viaje en el tiempo. Si no recuerdas el viaje, puedes acabar yendo adelante y atrás entre el 14 de noviembre y el 15 de noviembre para siempre, ¡pensando cada vez que es la primera!

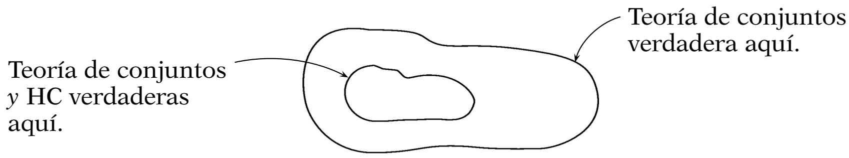
A Jim le impresiona sinceramente este razonamiento. Así que planifica un experimento para comprobar si es o no cierto y se prepara para llevarlo a cabo mañana. Vuelva a la página 530.

La imposibilidad (pág. 448)

¿Cómo demostró Gödel el teorema de incompletitud? En esencia, lo que hizo fue construir un enunciado en el lenguaje de la aritmética, el cual, aunque estaba en el contexto de los números, de hecho tenía el significado «Este enunciado no se puede demostrar». Tal enunciado, por supuesto, no se puede demostrar, a menos que el sistema sea inconsistente. No obstante, es en realidad cierto, y por tanto no se puede refutar. El meollo del trabajo de Gödel consistió en mostrar que era posible formular dicho enunciado.

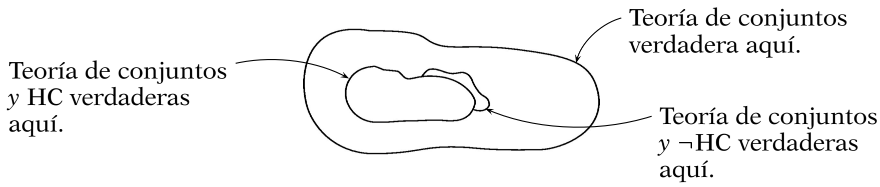
¿Cómo demostró Gödel que no se puede refutar HC? El esquema general es el mismo que en la demostración de que no se puede demostrar el quinto postulado de Euclides a partir de los otro cuatro, en «Geometría» en el capítulo 8. En aquel caso utilizamos un mundo estándar (la geometría tridimensional de Euclides) para construir uno no estándar (la geometría bidimensional esférica).

Gödel hace lo mismo. Comienza con un mundo en que la teoría de conjuntos es verdadera y construye dentro de él un mundo en que la teoría de conjuntos y HC son ambas verdaderas:



Esto demuestra que no se puede refutar HC, porque si se pudiera, HC sería falsa allí donde la teoría de conjuntos fuera verdadera, lo cual, como hemos visto, no es el caso.

¿Cómo demostró Cohen que no se puede demostrar HC? A partir del trabajo de Gödel fue capaz de aumentar el mundo de Gödel creando uno en que la teoría de conjuntos es verdadera y HC falsa.



Uno de los autores de este libro es un teórico de la teoría de conjuntos. A comienzos de 1976, cuando estaba dando los últimos retoques a su tesis doctoral, se supo que un científico europeo de renombre acababa de demostrar ¬CM. La tesis del autor se basaba por completo en CM. Si el informe era correcto, la tesis no valdría nada. Su supervisor le aconsejó que mantuviera la calma: La demostración podía tener un error, dijo. También pudiera ser que pasara un mes o más antes de que se comprobara completamente dicha demostración; quizás si el autor se diera prisa...

Poco más de una semana después se descubrió un error en la demostración. La tesis se había salvado; la tragedia académica (para el autor de este libro) no se hizo realidad.

Hoy día, CM sobrevive (aunque, como los otros axiomas, puede acabar por demostrarse que es falsa en cualquier momento). Curiosamente, ¡la proximidad de aquel tropezón no le enseñó precaución al autor! Al contrario, le incitó y animó a investigar axiomas aún más poderosos. ¿Por qué? Le gusta vivir al límite.

En cierto sentido, esto es lo más cercano al romanticismo a que puede llegar un matemático puro. Los mundos matemáticos, después de todo, ¡son imaginarios! En el mundo académico, sin embargo, el peligro es ineludiblemente real. Un simple resultado como el de ¬CM puede dar al traste con el trabajo de toda una vida.

Lógica informal

QUAYLE, GORE Y STOCKDALE (PÁG. 450)

1. Quayle describe su papel con Bush mediante un único incidente para presentarse a sí mismo como un líder experimentado. Nunca llega a describir lo que le gustaría hacer en un segundo mandato. Sus últimas puntualizaciones parecen débiles: «tener ideas bien arraigadas» no es lo mismo que «luchar por lo que crees», y tampoco es obvio que esto último le cualifique a uno para ser presidente.
2. Stockdale describe un papel bastante abierto. Menciona áreas que son de su interés. No responde, en cambio, a la pregunta acerca de sus méritos.
3. Gore ignora por completo la mayoría de las preguntas, y en cambio prefiere atacar a la administración actual por su negligencia en política interna. Las únicas afirmaciones relevantes a las preguntas son aquellas que enfatizan la forma en que él y Clinton trabajan juntos.
4. Quayle parece tomar el salto fuera de contexto de Gore como una invitación para dar alguno más. Su única respuesta a los ataques de Gore es otro ataque en sí mismo. También sugiere que trabajar juntos es malo. Su única evidencia es que el presidente debe tomar decisiones, pero ciertamente esto no significa que el presidente y el vicepresidente no puedan cooperar. Esto le lleva a condenar a Clinton por no haber tomado una decisión firme en la guerra del Golfo, llegando a sugerir que en consecuencia no está capacitado como líder.
5. Gore ignora este ataque por completo y repite sus acusaciones contra Bush por no haber prestado atención a los problemas internos. Al final ataca las políticas económicas de la administración. A continuación se suceden una serie de provocaciones, donde cada uno ignora los ataques de los otros.
6. Stockdale señala hábilmente que este tipo de confrontaciones ha dado como resultado que no se llegue a hacer nada para solucionar los pro-

blemas. No acaba de explicar por qué un tercer candidato tendría éxito donde los principales partidos han fracasado.

La fantástica aventura de Tom y Jim

16 de noviembre

Tom y Jim han vuelto juntos. Juntos se encuentran con Tom y Jim, que están algo más que sorprendidos de encontrarlos. Le cuentan el plan a Jim (16 de noviembre) y éste está de acuerdo en cortarle el pelo a Jim (17 de noviembre), ya que, de todas formas, siempre se lo suele cortar él mismo.

Según caen los rizos de Jim (del 16 de noviembre), los de Jim (del 17 de noviembre) permanecen igual. ¿Es esto una paradoja? ¡El pelo de Jim (del 16 de noviembre) tiene diez centímetros de largo, pero el pelo de Jim (del 17 de noviembre) tiene trece!

Con una sensación de destino fatal inminente, Tom y Jim (del 17 de noviembre) entran en la máquina del tiempo para volver al 17 de noviembre.

Antes de continuar en la página 504, piense en la situación. ¿La puede resolver?

EXÁMENES TIPO TEST: RAZONAMIENTO LÓGICO (PÁG. 454)

1. C 3. B 5. D 7. D 9. B 11. E 13. C 15. B 17. C 19. D 21. E

EXÁMENES TIPO TEST: RAZONAMIENTO ANALÍTICO (PÁG. 462)

1. C 3. B 5. C 7. D 9. B 11. D 13. C 15. B 17. B 19. D 21. E 23. B

EXÁMENES TIPO TEST: REGLAS Y DISPUTAS (PÁG. 467)

1. B
3. B Ésta es ciertamente relevante, y no hay manera de que sepamos la respuesta.
5. D No tiene ninguna importancia para la aplicación de la segunda regla si Nelson hizo alguna otra cosa distinta de leer un trabajo relevante al examen.
7. B

9. C
11. D La cuestión es: ¿Es responsable *el Colegio Sofista*? ¡Enrevesado!
13. B
15. B
17. B
19. D
21. B Nótese que la pregunta tiene antecedente: «cuando ningún otro...». Ahora bien, puede no ser relevante si algún otro estudiante afro-americano ha protestado o no, pero la pregunta en cuestión: «¿Pueden considerarse los comentarios del Dr. Hovic agresivos?», *sí es* relevante. La respuesta también sería B si la pregunta fuera «Si Orioles ganó el campeonato, ¿pueden considerarse los comentarios del Dr. Hovic agresivos?» Por el contrario, la respuesta a «Si los comentarios del Dr. Hovic pueden considerarse agresivos, ¿ganó Orioles el campeonato?» sería D.
23. D
25. D

Curiosidades y rompecabezas

The Digestor's Digest, PÁG. 8 (PÀG. 474)

La página de humor es la 7. Recuerde que, en la página 1, una de las partes afirmaba que no era un anuncio. Más tarde (en la discusión de la página 4), llegamos a la conclusión de que esto no podía ocurrir en la página de humor: ni un artículo ni un anuncio pueden afirmar tal cosa en una página de humor. Ahora bien, considere la página 7. La segunda parte afirma que es un anuncio. En una página que no sea de humor, ninguna parte puede afirmar esto: lleva a contradicción.

AVISO DE EXAMEN VIII (PÁG. 474)

Si está buscando aquí una pista, olvídelo.

SOBRE LA NOTACIÓN POLACA (PÁG. 475)

1. c 3. c 5. e

La frase en polaco al comienzo dice que no se necesita saber polaco para responder a las preguntas. Desde luego que alguien que no sepa polaco puede llegar a descubrirlo. Los que sepan polaco pueden resultar confundidos: ¡Las frases de las preguntas están tomadas de obras románticas del siglo XIX! Por otra parte, si el lector no sabe polaco, ¡no necesita saber el significado de dicha frase en polaco!

LA FANTÁSTICA AVENTURA DE TOM Y JIM (PÁG. 476)

Los conceptos de tiempo y viaje en el tiempo han estado siempre entre los favoritos de los escritores de filosofía y de ciencia ficción. En un artículo poco conocido, el gran lógico filosófico Kurt Gödel mostraba cómo la teoría general de la relatividad de Einstein permitía la posibilidad del viaje en el tiempo («Un ejemplo de un nuevo tipo de solución cosmológica de las ecuaciones de campo de gravitación de Einstein», *Reviews of Modern Physics*, 21: 447-450 (1949)). Uno de los investigadores contemporáneos que mejor llegan al fondo de las cosas es Michael Dummett (véanse sus ensayos «¿Puede un efecto preceder a su causa?» y «Traer el pasado a colación», ambos reimpresos en su *Truth and Other Enigmas* (Harvard University Press, 1978)). El artículo «Viaje en el tiempo», de Martin Gardner, de su *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments* (W. H. Freeman, 1988), da una excelente visión general. Discute muchas de las ideas que hay en nuestra aventura, además de la relatividad. El artículo tiene muchas otras referencias adicionales.

Entre los escritores de ciencia ficción, uno de los más grandes es Philip K. Dick, y su historia corta «Un poco para nosotros los tempunantes», en *The Best of Philip K. Dick* (Ballantine, 1977), es una sobresaliente, aunque deprimente, descripción del viaje en el tiempo. Igualmente impresionante es la novela de Ursula K. Le Guin, *The Lathe of Heaven* (Avon, 1971), que describe a un hombre cuyos sueños pueden cambiar el pasado y un psicoterapista que intenta explotarlo. Barry Malzberg, en *Herovit's World* (Random House, 1973), habla de un viajero del tiempo que se multiplica a sí mismo más allá de lo necesario. Frederic Brown escribió una espléndida historia corta sobre una máquina del tiempo del tercer tipo, en la que los objetos dentro de la máquina viajan en el tiempo, pero los objetos de fuera no. Un científico utilizaba la máquina para mandarse a sí mismo al pasado. Escrita en 1953, la historia, «La galería de los espejos», fue incorporada a la antología de Brown, *Honeymoon in Hell* (Bantam, 1958). Es una obra maestra.

La fantástica aventura de Tom y Jim

14 de noviembre

Tom argumenta que el hombre del tiempo no está hablando del futuro, sino del pasado. Lo que quiere decir es que el hombre del tiempo ha visto condiciones como ésas muchas veces anteriormente, y que en el pasado esas condiciones han ido seguidas de lluvia como la mitad de las veces. No hace falta una máquina del tiempo para comprender esto. Vaya a la página 579.